

Körök

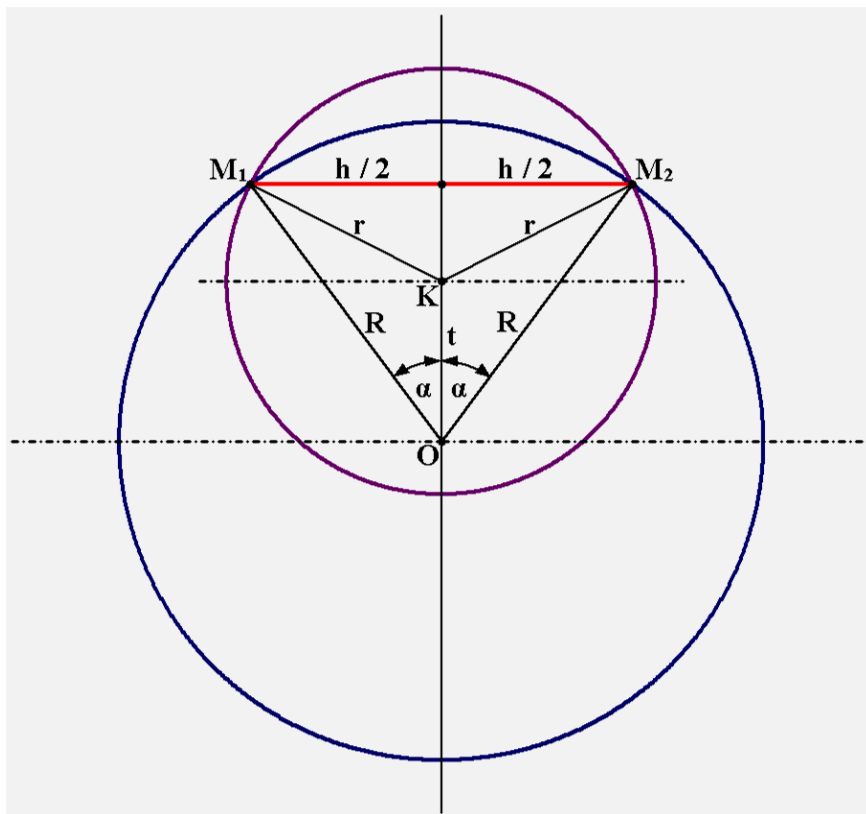
A feladat

A R és r sugarú gömbök akadálytalanul egymásba hatolhatnak, metsződhetnek.

Határozzuk meg a két gömb metsződése során előálló kör területét a gömbök középpont - jai t távolsága függvényében, majd taglaljuk az eredményt!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt a metszeti kör élből nézve egy h hosszúságú szakasznak látszik.

A metszeti kör T területe:

$$T = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \pi . \quad (1)$$

Továbbá:

$$\frac{h}{2} = R \cdot \sin \alpha . \quad (2)$$

Most koszinusztétellel:

$$r^2 = t^2 + R^2 - 2 \cdot t \cdot R \cdot \cos \alpha \rightarrow t^2 + R^2 - r^2 = 2 \cdot t \cdot R \cdot \cos \alpha , \text{ innen:}$$

$$\cos \alpha = \frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t} . \quad (3)$$

Majd (2) és (3) - mal is:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \cdot \sin^2 \alpha = R^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = R^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t}\right)^2\right] , \quad (4)$$

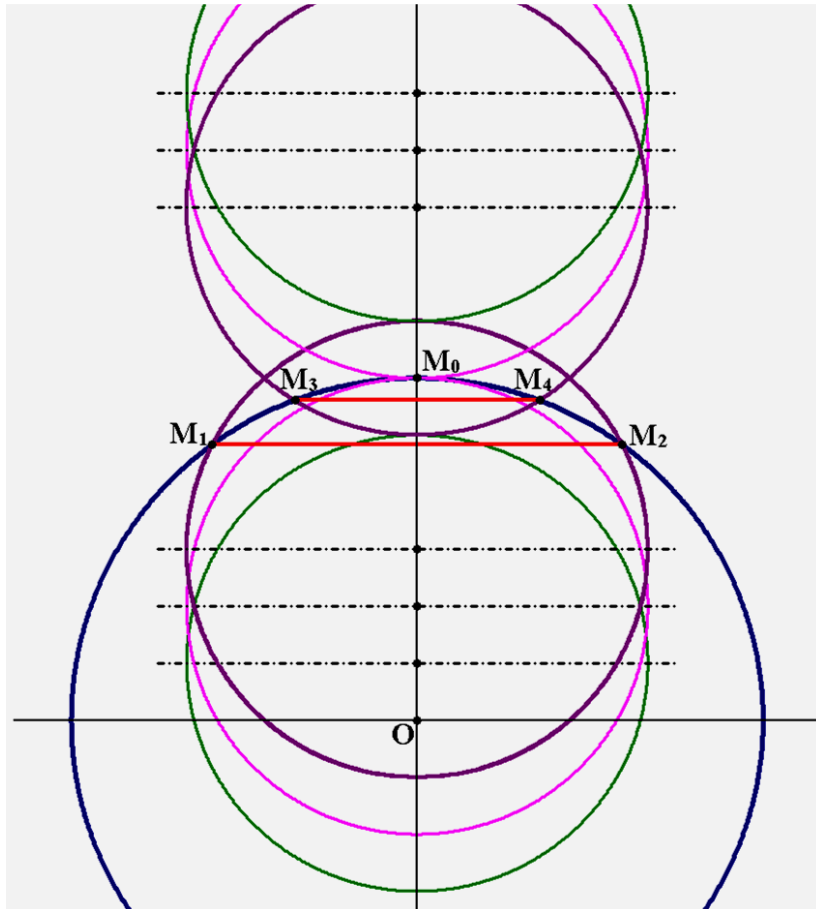
ezután (1) és (4) - gyel:

$$\underline{\underline{T(t) = R^2 \cdot \pi \cdot \left[1 - \left(\frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t}\right)^2\right] .}} \quad (5)$$

Az (5) képlet írja le a metszatkör területének alakulását a t változó, valamint az R és r paraméterek függvényében. Nem kétséges, hogy ezt taglalni kell. Ugyanis a két gömb kölcsönös helyzete tekintetében 3 fő eset lehetséges:

- ~ a két gömbnek végtelen sok közös pontja van, melyek a metszeti kör pontjai;
- ~ a két gömb egy pontban érintkezik,
- ~ a két gömbnek nincs közös pontja.

Ezeket az eseteket érdemes elválasztani egymástól – 2. ábra.



2. ábra

Látható, hogy

- ~ a zöld gömböknek nincs közös pontja a kék gömbbel,
- ~ a pink gömböknek egy közös pontja van a kék gömbbel,
- ~ a bordó gömböknek végtelen sok közös pontja van a kék gömbbel.

A t távolságra vonatkozó korlátozó feltétel – a 2. ábra szerint is – az alábbi:

$$R - r \leq t \leq R + r . \quad (6)$$

A (6) relációban egyenlőség esetén a metszeti kör területe éppen nulla.

Most nézzük meg, hol lehet szélsőértéke az (5) függvénynek!

Ennek szükséges feltétele:

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0 . \quad (7)$$

Most (5) és (7) - tel:

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= R^2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{dt} \left[1 - \left(\frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t} \right)^2 \right] = 0 , \\ \frac{d}{dt} \left[1 - \left(\frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t} \right)^2 \right] &= 0 - 2 \cdot \frac{t^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t} \cdot \frac{2 \cdot t \cdot 2 \cdot t \cdot R - (t^2 + R^2 - r^2) \cdot 2 \cdot R}{(2 \cdot R \cdot t)^2} = 0 , \\ \frac{t^2 + R^2 - r^2}{R \cdot t} \cdot \frac{4 \cdot R \cdot t^2 - 2 \cdot R \cdot t^2 - (R^2 - r^2) \cdot 2 \cdot R}{(2 \cdot R \cdot t)^2} &= 0 , \\ \frac{t^2 + R^2 - r^2}{R \cdot t} \cdot \frac{2 \cdot R \cdot t^2 - (R^2 - r^2) \cdot 2 \cdot R}{4 \cdot R^2 \cdot t^2} &= 0 ; \end{aligned} \quad (8)$$

mivel (8) első tényezője pozitív, ezért csak a második lehet egyenlő zérussal:

$$2 \cdot R \cdot t_0^2 - (R^2 - r^2) \cdot 2 \cdot R = 0 \rightarrow t_0^2 - (R^2 - r^2) = 0 \rightarrow t_0^2 = R^2 - r^2 ,$$

innen:

$$\underline{t_0 = \sqrt{R^2 - r^2}} \geq 0 . \quad (7)$$

A 2. deriváltat már nem vizsgáljuk, helyette ábrázoljuk a függvényt. Ehhez adatok:

$$R = 6 \text{ cm} ; r = 4 \text{ cm} . \quad (A)$$

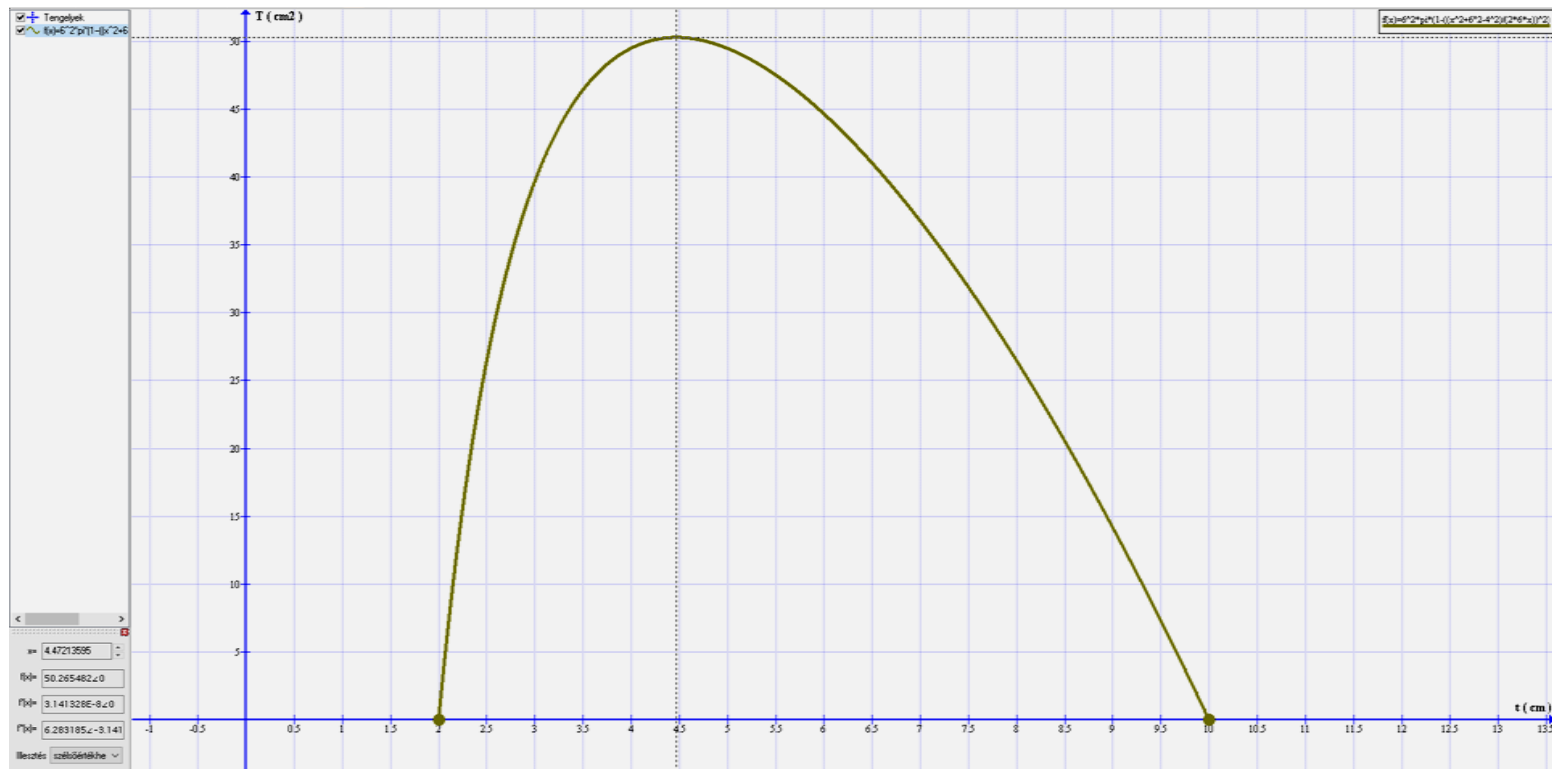
Most (7) és (A) - val a szélsőérték helye:

$$t_0 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} \text{ cm} = 4,472135959 \text{ cm} \approx 4,472 \text{ cm} . \quad (a)$$

Majd (5) és (A) - val:

$$T(t) = 6^2 \cdot \pi \cdot \left[1 - \left(\frac{t^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot t \cdot 6} \right)^2 \right] (\text{cm}^2) . \quad (b)$$

A (b) függvény grafikonját a 3. ábrán szemlélhetjük.



3. ábra

Erről leolvasható, hogy:

$$t_0 = 4,47213595 \text{ cm} \approx 4,472 \text{ cm} , \quad (c)$$

$$T(t_0) = 50,265482 \text{ cm}^2 \approx 50,27 \text{ cm}^2 . \quad (d)$$

Örömmel látjuk, hogy az adatokkal számított (a) és (c) értékek megegyeznek.

A 3. ábráról az is leolvasható, hogy

~ a $T(t)$ területfüggvénynek maximuma van a t_0 gömbközeponti távolság esetén;

~ a terület nagysága zérus a (6) és (A) szerinti

$$R - r = 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm} \text{ és } R + r = 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (e)$$

értékeknél;

~ a területfüggvény nem vehet fel negatív értékeket.

Megjegyzések:

M1. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó a (6) relációt vezesse le saját maga is; továbbá, hogy vizsgálja meg az $R = r$ esetet!

M2. Ez a feladat térgeometriainak látszik, de valójában a két gömb O és K középpontjain átmenő metszetét mutató 1. ábra síkjában minden lényeges dolgot elrendezhettünk.

M3. A szélsőérték helyét megadó (7) képlet így is írható:

$$t_0 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{(R + r) \cdot (R - r)} \geq 0 ; \quad (7 / 1)$$

ez azt is jelenti, hogy:

$\sim R \geq r > 0$, valamint:

$\sim$ a szélsőérték helye a (6) szerinti határ - távolságok mértani közepeként adódik.

M4. A szélsőérték nagyságának vizsgálata is érdekes eredményre vezet; (5) és (7) - tel:

$$\begin{aligned} T(t_0) &= R^2 \cdot \pi \cdot \left[1 - \left(\frac{t_0^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t_0} \right)^2 \right] \rightarrow \tau = \frac{T(t_0)}{R^2 \cdot \pi} = 1 - \left(\frac{t_0^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot t_0} \right)^2 \rightarrow \\ \tau &= 1 - \left(\frac{R^2 - r^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \right)^2 = 1 - \left[\frac{2 \cdot (R^2 - r^2)}{2 \cdot R \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \right]^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right)^2 = 1 - \frac{R^2 - r^2}{R^2} = \frac{r^2}{R^2} , \text{ tehát:} \\ \tau &= \frac{T(t_0)}{R^2 \cdot \pi} = \frac{r^2}{R^2} \rightarrow T(t_0) = R^2 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{R^2} = r^2 \cdot \pi , \text{ vagyis:} \\ \underline{\underline{T_{max} = r^2 \cdot \pi .}} \end{aligned} \quad (8)$$

Számszerűen (8) és (A) - val:

$$T_{max} = 4^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 = 50,26548246 \text{ cm}^2 , \quad (f)$$

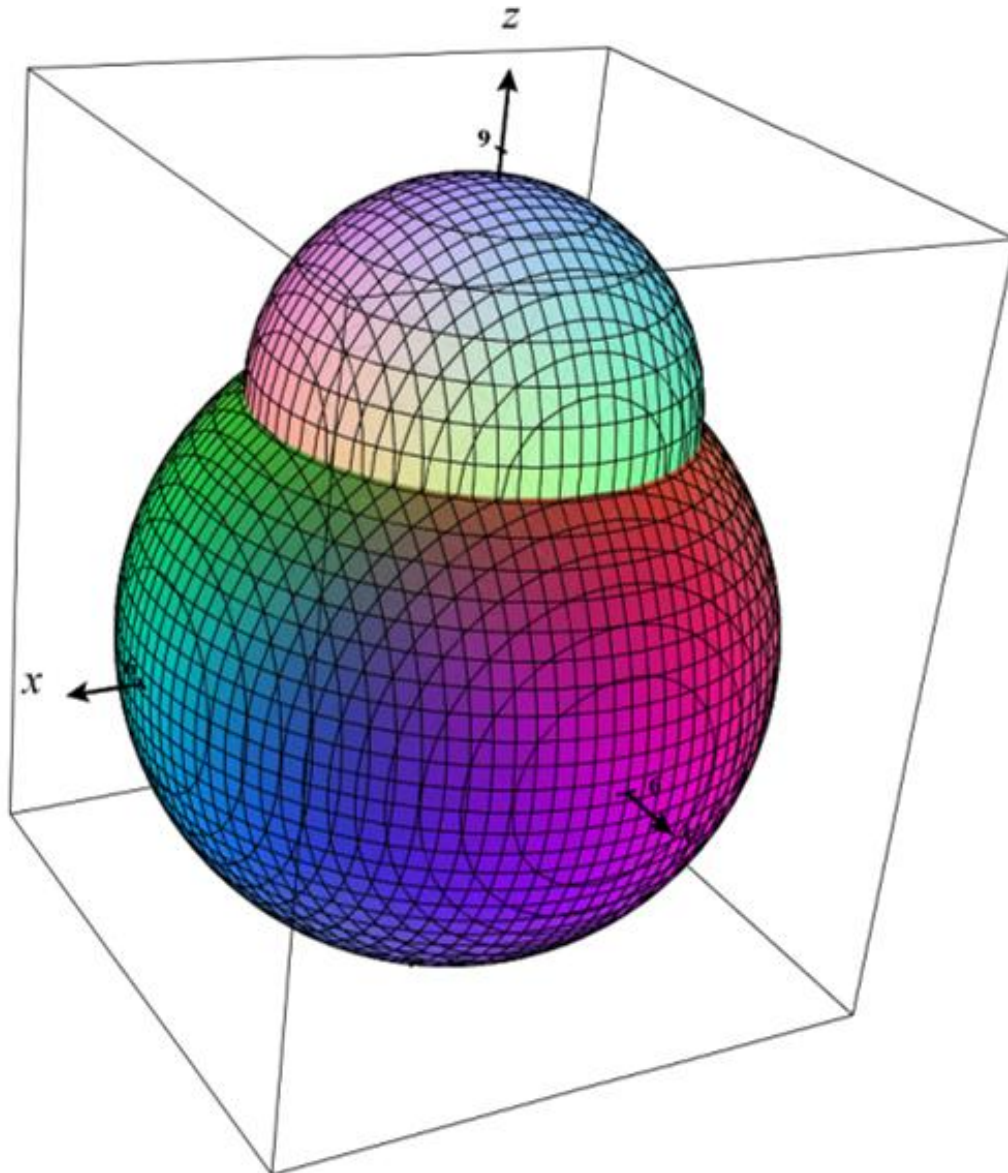
egyezésben (d) - vel.

Arra jutottunk, hogy a két gömb összemetsződésekor előálló metszeti kör területének maximuma egyenlő a kisebbik sugarú gömb legnagyobb metszetének területével.

Ezt a tényt szemléltetjük a 4. ábrán.

Látjuk, hogy a (8) eredmény mintegy magától előáll.

M5. A fenti feladat megoldási módjai azt mutatják, hogy néha gyorsan és könnyen lehet eredményre jutni tisztán geometriai úton, szerkesztéssel. Ez jelen esetben az r sugarú kör eltolását jelentette abba a helyzetbe, melyre fennáll, hogy $h_0 = 2r$. Egyben arra is példát ad, hogy hogyan egészítik ki egymást a számítás és a szerkesztés.



5. ábra – forrása: [1]

Forrás:

[1] – <https://www.monroecc.edu/faculty/paulseeburger/calcnf/CalcPlot3D/>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 11. 16.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>