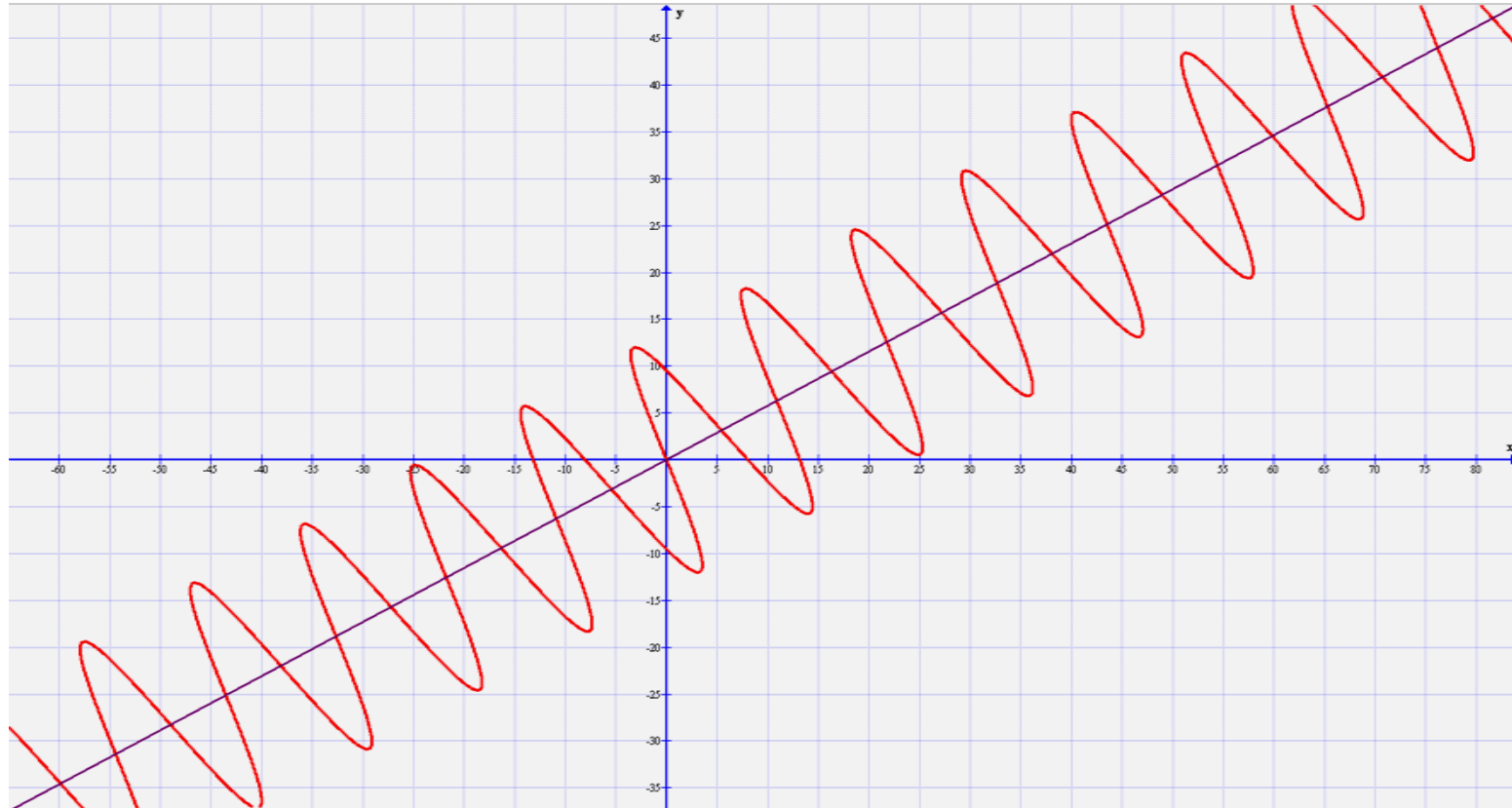


Hullámvonalak, melyek abszcissza - tengelye nem vízszintes egyenes

Eszünkbe jutott, hogy rajzolni kellene egy olyan szinusz - hullámot, melynek abszcissza - tengelye a vízszintessel α szöget zár be – 1. ábra.



1. ábra

Ahhoz, hogy eljussunk az 1. ábra hullámvonalához, több mindent végig kell gondolni.

Ehhez először tekintsük a 2. ábrát!

Itt azt mutatjuk, hogy a lila szinusz - hullám S pontjának pillanatnyi helyzete két elmozdulás eredőjeként áll elő;

~ az egyik összetevő mozgás az R sugarú körön $\omega = \text{áll.}$ szögsebességgel keringő P pontnak az η tengelyre vett vetületi mozgása, valamint

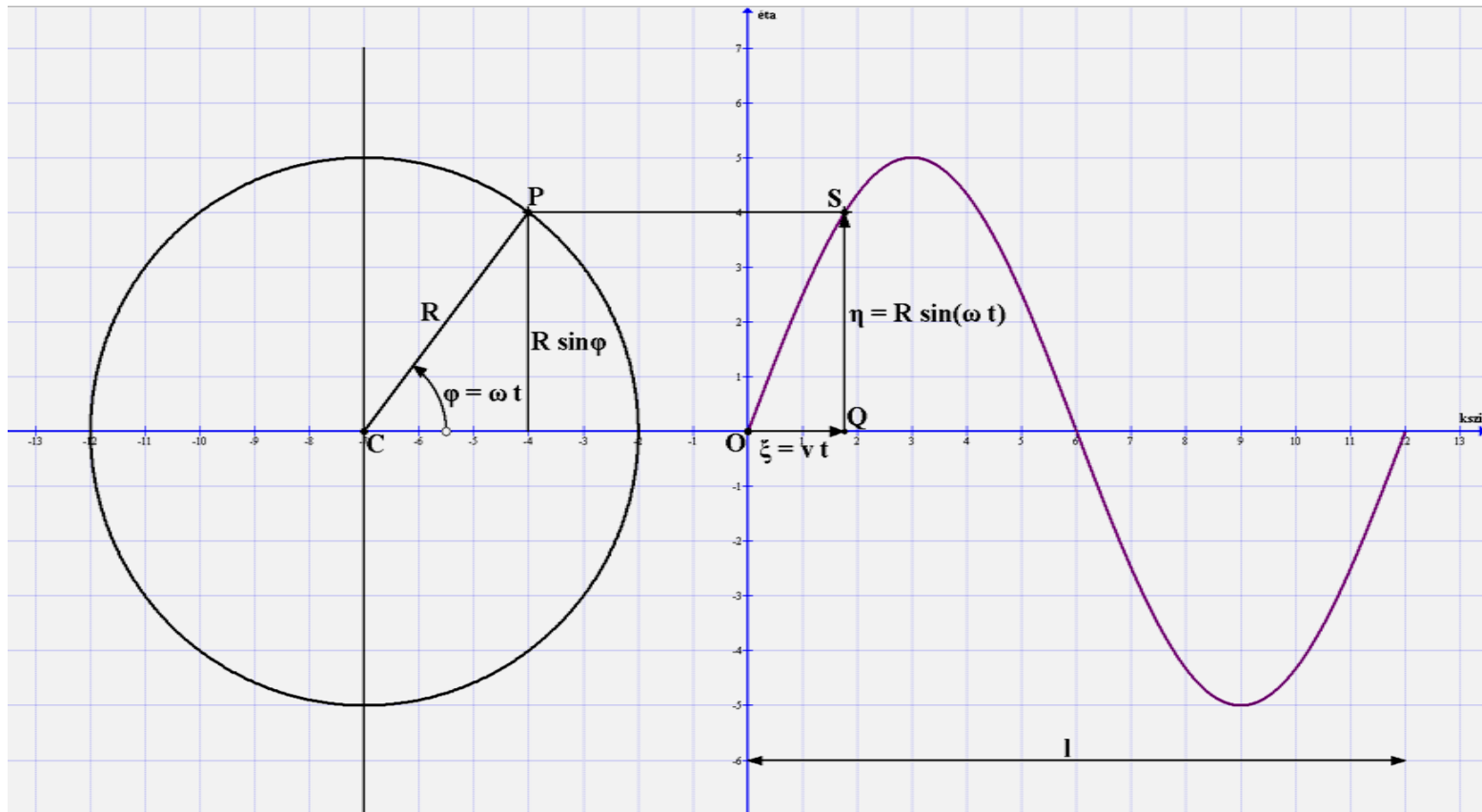
~ a ξ tengelyen mozgó Q pont $v = \text{áll.}$ sebességű egyenes vonalú egyenletes mozgása.

Ennek megfelelően a 2. ábra szerint a t idővel:

$$\xi(t) = v \cdot t, \quad \eta(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (1)$$

Mint hogy a T periódusidővel is:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \quad v \cdot T = l, \quad (2)$$



2. ábra

így felírhatjuk az alábbi arányt:

$$\frac{\varphi}{\xi} = \frac{\omega \cdot t}{v \cdot t} = \frac{\omega}{v} = \frac{2 \cdot \pi}{v \cdot T} = \frac{2 \cdot \pi}{l} \rightarrow \underline{\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot \xi = k \cdot \xi} . \quad (3)$$

Most a szinusz - rezgés képlete, (1) , (2) és (3) - mal:

$$\eta = R \cdot \sin(\omega \cdot t) = R \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot \xi \right) = A \cdot \sin(k \cdot \xi) ,$$

tehát:

$$\underline{\eta(\xi) = A \cdot \sin(k \cdot \xi)} . \quad (4 / 1)$$

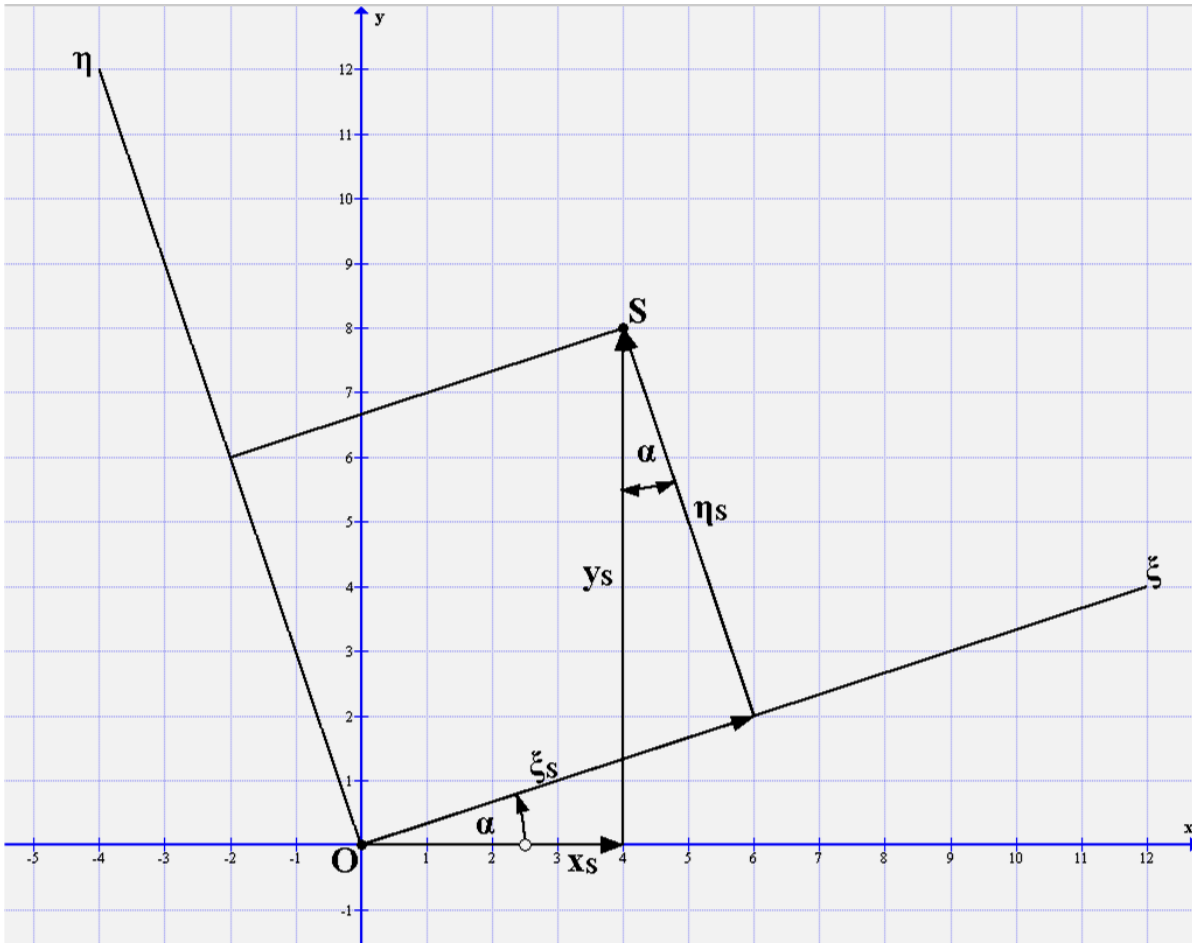
azaz:

$$A = R , \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{l} , \quad (4 / 2)$$

ahol **A** a rezgés amplitúdója.

Másodszor: rátérünk a ferde helyzet leírására.

Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Ez alapján írhatjuk – már „s” index nélkül – , hogy:

$$\xi = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \quad , \quad \eta = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha \quad . \quad (5)$$

Majd (4 / 1) és (5) - tel:

$$\underline{\underline{y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha - A \cdot \sin[k \cdot (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)] = 0 .}} \quad (6)$$

A (6) képlet egy $f(x, y) = 0$ alakú implicit függvénykapcsolat.
Ez egy meglepő fejlemény.

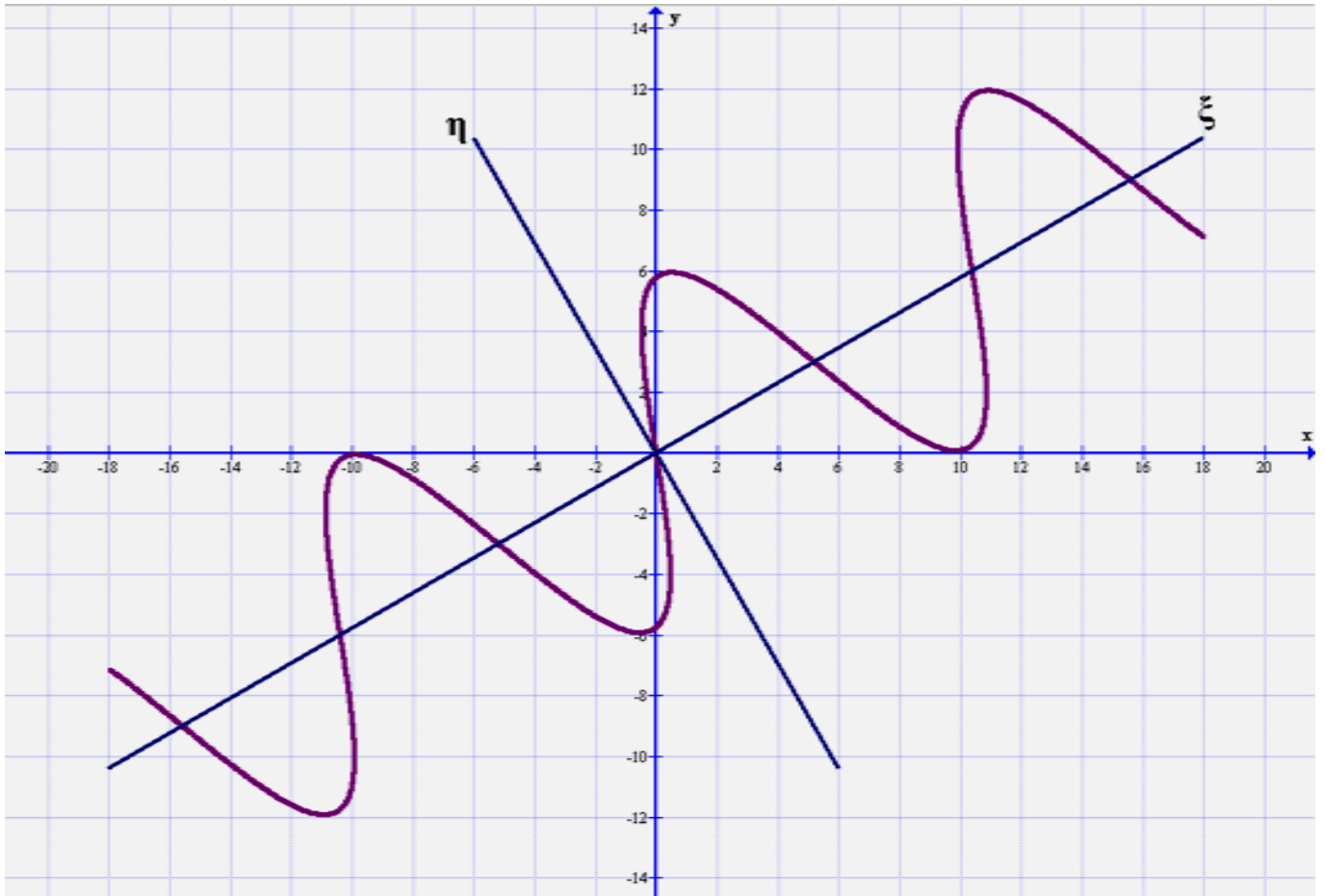
Adatok az ábrázoláshoz:

$$l = 12 \text{ (cm)}; \quad \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}; \quad A = R = 5 \text{ (cm)}. \quad (A1)$$

Az implicit függvény egyenlete (4 / 2), (6) és (A1) - gyel:

$$\underline{\underline{y \cdot \cos \frac{\pi}{6} - x \cdot \sin \frac{\pi}{6} - 5 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{6} \cdot \left(x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + y \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] = 0 .}} \quad (a)$$

Az (a) függvényt a 4. ábrán mutatjuk.



4. ábra

.....

Következő feladatként legyen a hullámvonal abszcissza - tengelye egy r sugarú kör!

Ekkor (4 / 1) szerint is:

$$\eta(\xi) = A^* \cdot \sin(k \cdot \xi) ,$$

$$A^* = R - r ,$$

$$\xi = r \cdot \varphi ,$$

$$2 \cdot r \cdot \pi = N \cdot l \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{l} = \frac{N}{r} \rightarrow k = \frac{2 \cdot \pi}{l} = \frac{N}{r} ;$$

$$\eta(\varphi) = (R - r) \cdot \sin\left(\frac{N}{r} \cdot r \cdot \varphi\right) = (R - r) \cdot \sin(N \cdot \varphi) ,$$

$$\rho = r + \eta(\varphi) = r + (R - r) \cdot \sin(N \cdot \varphi) ,$$

$$\underline{\underline{\rho(\varphi) = r + (R - r) \cdot \sin(N \cdot \varphi) .}} \quad (7)$$

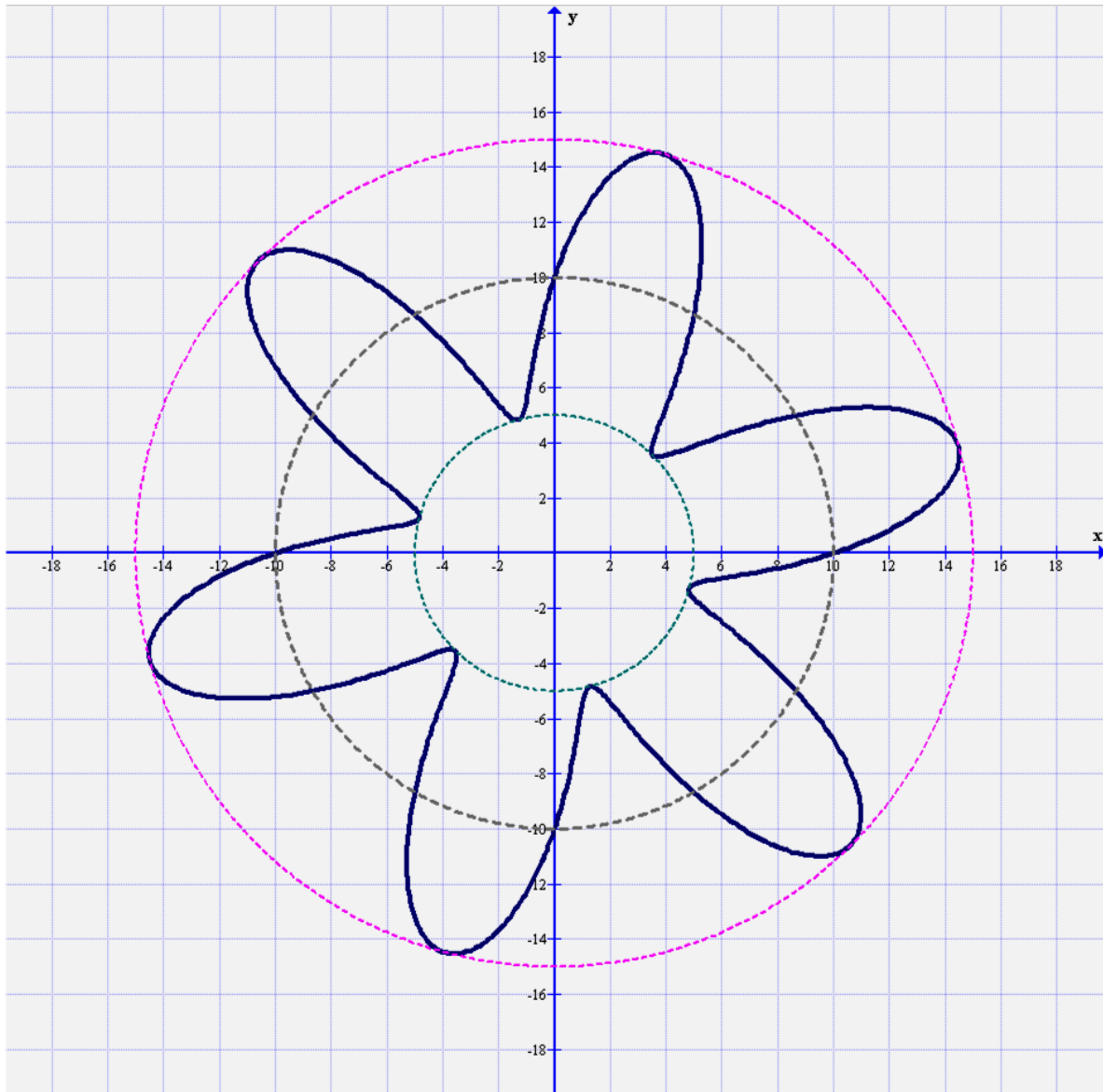
Adatok az ábrázoláshoz:

$$r = 10 \text{ (cm) } ; R = 15 \text{ (cm) } ; N = 6 . \quad (A2)$$

A grafikon polárkoordinátás egyenlete (7) és (A2) - vel:

$$\underline{\rho(\varphi) = [10 + 5 \cdot \sin(6 \cdot \varphi)] \text{ (cm) } .} \quad (b)$$

A (b) függvény grafikonját az 5. ábra mutatja.



5. ábra

A szemléletünknek lehet némi gondja itt a szinusz - hullám felismerésével.

Ezért megkíséreljük a keresett görbe egyenletét egy másik módon levezetni. Ehhez tekintsük a 6. ábrát! Itt azt láthatjuk, hogy az O középpontú, R sugarú nagy körön $\Omega = konst.$ szögsebességgel kering a C pont, mely egy r sugarú kis kör középpontja. Utóbbin a K pont kering $\omega = konst.$ szögsebességgel. Ennek vetülete a OC egyenesre a P pont.

Most (8) és (9) - cel:

$$x_p = [R + r \cdot \sin(N \cdot \phi)] \cdot \cos \phi , \quad y_p = [R + r \cdot \sin(N \cdot \phi)] \cdot \sin \phi . \quad (10)$$

A (10) képletek a keresett görbe paraméteres egyenletrendszer.

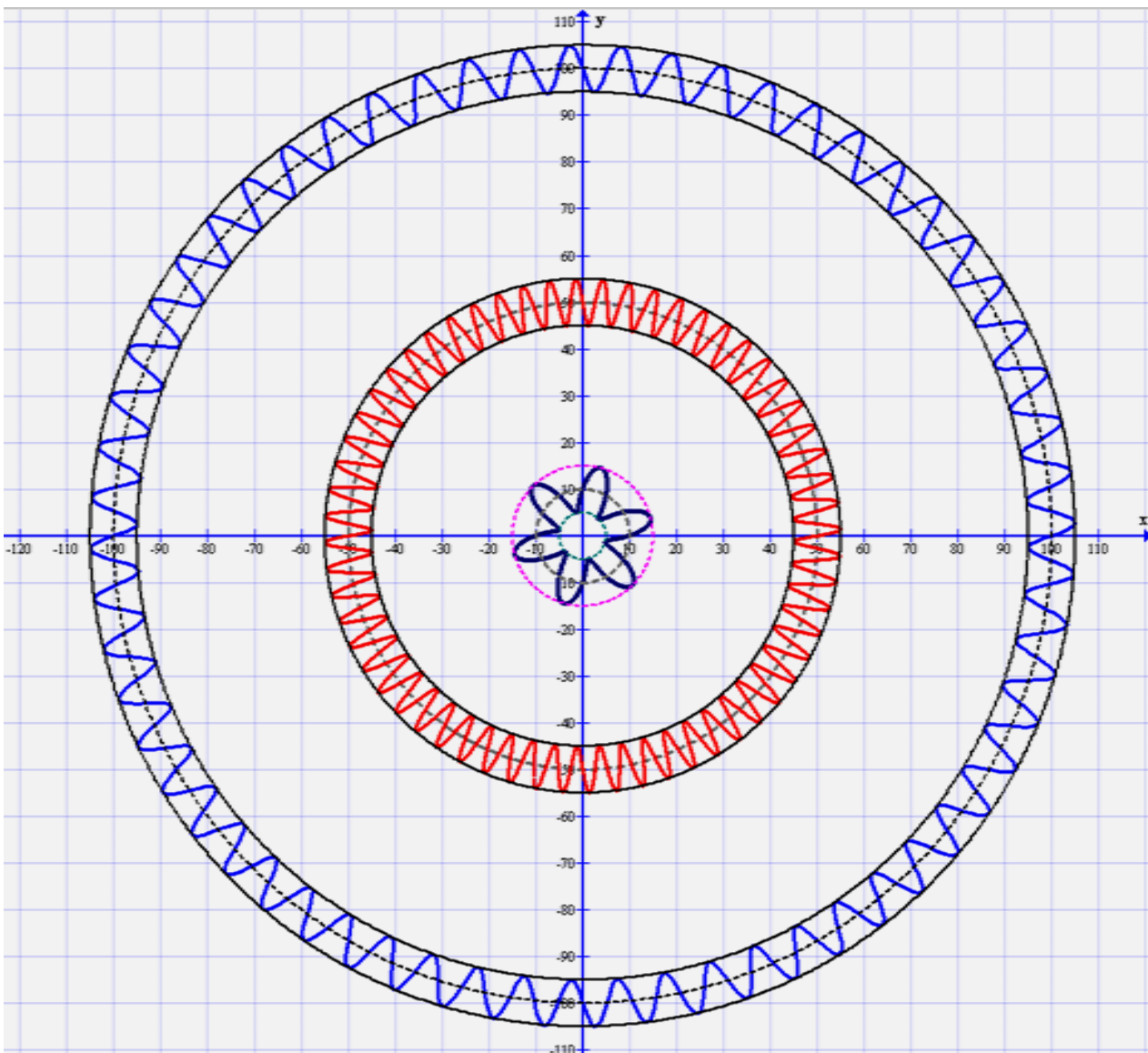
Minthogy a paraméteres egyenletek és a polárkoordináták kapcsolata:

$$x_p(\phi) = \rho(\phi) \cdot \cos \phi , \quad y_p(\phi) = \rho(\phi) \cdot \sin \phi , \quad (11)$$

ezért a keresett görbe polárkoordinátás egyenlete, (10) és (11) összehasonlításával:

$$\underline{\rho(\phi) = R + r \cdot \sin(N \cdot \phi) .} \quad (12)$$

A (12) függvény – a kissé más jelölések ellenére – ugyanazt jelenti, mint a (7) szerinti; vagyis megint megkaptuk azt a függvényt, aminek nem igazán szép az 5. ábra szerinti képe. Most tekintsük a 7. ábrát!



7. ábra

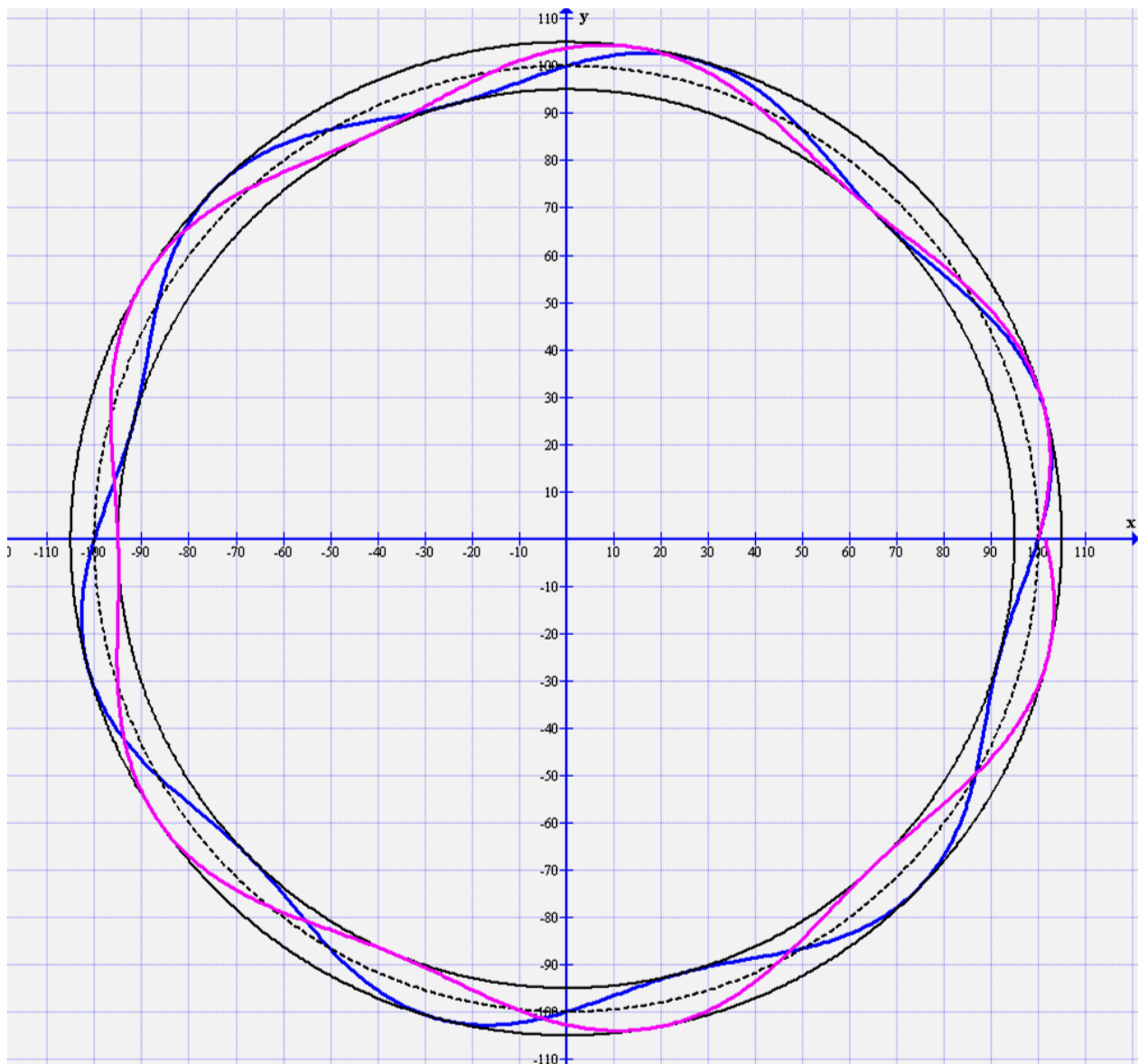
Itt az 5. ábra görbéje mellett még két másik, körök által közrefogott hullámvonalat is megrajzoltunk. Azt látjuk, hogy – a 6. ábra jelöléseivel – az r/R sugárárány viszonylag kis értékeinél jobb az ábra „hullámvonal - érzete”. Ekkor érezzük inkább úgy, mintha a szinuszgörbe egyenes vonalú abszcissza - tengelyét egy R sugarú körre formáltuk volna. A 7. ábrán a piros hullámvonal egyenlete:

$$\rho(\phi) = 50 + 5 \cdot \sin(60 \cdot \phi) ; \quad (c)$$

a kék hullámvonal egyenlete:

$$\rho(\phi) = 100 + 5 \cdot \sin(60 \cdot \phi) . \quad (d)$$

Most tekintsük a 8. ábrát!



8. ábra

Itt együtt ábrázoltuk a

$$\rho(\phi) = 100 + 5 \cdot \sin\left(\frac{60}{10} \cdot \phi\right), \quad (\text{kék görbe}) \quad (e)$$

és a

$$\rho(\phi) = 100 + 5 \cdot \sin\left(\frac{60}{11} \cdot \phi\right), \quad (\text{pink görbe}) \quad (f)$$

egyenletű görbéket. Látjuk: ha N nem egész szám, akkor a (pink) görbe nem záródik. (Nagyítás!)

Megjegyzések:

M1. Látható, hogy az eddigi esetek egyikére sem mondható, hogy „sima ügy”. Meghökkenítő, amiket tapasztaltunk. A nehézségek tovább fokozódhatnak, ha a hullám - vonalat nem egy körre, hanem pl. egy ellipszisre akarjuk ráültetni. Mi most itt megállunk.

M2. Nézze el nekünk az érdeklődő Olvasó, hogy a 2. feladat első és a második részében a jelölések nem teljesen egyeznek! Magyarázatként csak annyit, hogy így adta magát.

M3. Mondtuk, hogy az 5. ábrán alig ismerhető fel a szinusz - hullám, a 7. ábrán a piros meg a kék görbe már egész jó. E grafikonok függvényei ugyanazon típusúak, de mások a bennük szereplő paraméterek. A 7. ábrán a kis és a nagy ábrák közti különbség láttán az fogalmazódott meg bennünk, hogy olyan ez a torzulási jelenség, mint a Szilárdságtanban a hajlítás: csak a semleges tengely / réteg „szálai” maradnak ugyanolyan hosszúak, mint terheletlen állapotukban, a többiek megnyúlnak vagy megrövidülnek. Itt a semleges tengely a hullámvonal abszcisszája, a húzott szélső szál a felső burkoló körön, a nyomott szélső szál az alsó burkoló körön található. Minél nagyobb a semleges szál körének sugara a hullám amplitúdójához képest, annál kevésbé torzul a kör mentén futó hullámvonal alakja az egyenes mentén futó hullám alakjához képest. Így valahogy.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnökstanár

Sződliget, 2020. 10. 30.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>