

NYUGAT-MAGYARORSZÁGI EGYETEM  
FAIPARI MÉRNÖKI KAR  
MŰSZAKI MECHANIKA ÉS TARTÓSZERKEZETEK INTÉZET

**Dr. Hajdu Endre**  
egyetemi docens

*S Z I L Á R D S Á G T A N*

**Jegyzet a faipari-, papíripari és erdőmérnök**  
**BSC, MSC hallgatók számára**

**Javított kiadás**

**S o p r o n**  
**2 0 0 8**

**Tartalomjegyzék**

1. Bevezetés a szilárdságtanba	3
2. A szerkezeti anyagok néhány tulajdonsága	3
3. Vektorok III.	4
4. Feszültség	4
5. Feszültségi állapotok	10
6. Hooke-törvény	15
7. A természetes faanyag szilárdságtani jellemzése	20
8. A szilárdsági méretezés alapelvei	23
9. Húzás és nyomás	27
10. Nyírás	37
11. Síkidomok másodrendű nyomatékai	45
12. Tiszta hajlítás	49
13. Közönséges (összetett hajlítás)	58
14. Hajlított tartók deformációja	70
15. Nyíróerő hatása a deformációra	74
16. Csavarás	79
17. Összetett igénybevételek I.	85
18. Összetett igénybevételek II.	93
19. Kihajlás	101
20. Méretezés határigénybevételre	108
21. Alakváltozási energia	112
22. Határozatlan tartók	119
23. Keretszerkezetek, lemezek	126

## BEVEZETÉS A SZILÁRDSÁGTANBA

Ebben a fejezetben a feszültségek elméletének néhány alapvető tényét, valamint a feszültségek és a deformációk közötti összefüggést ismertetjük. Rámutatunk a fa és a faalapú anyagok néhány szilárdságtani jellegzetességére, valamint a szilárdságtani méretezés szempontjaira.

### 1.1. A szerkezeti anyagok néhány tulajdonsága

A sztatika tárgyalása során feltettük, hogy a vizsgált testek, szerkezetek tökéletesen merevek, de a testek anyagáról közelebbi megállapításokat nem tettünk.

A szilárdságtanba feladjuk a testek merevségére vonatkozó feltevést s a szerkezeti anyagokról a következő tulajdonságokat tételezzük fel:

Kontinuitás: az anyag kellően kisméretű darabja, az általa elfoglalt teret teljesen kitölti, benne likacsok, üregek nincsenek.

Homogenitás: az anyag fizikai tulajdonságai nem függvényei a helynek, a vizsgált anyag bármely pontjában azonos tulajdonságokat mérhetünk.

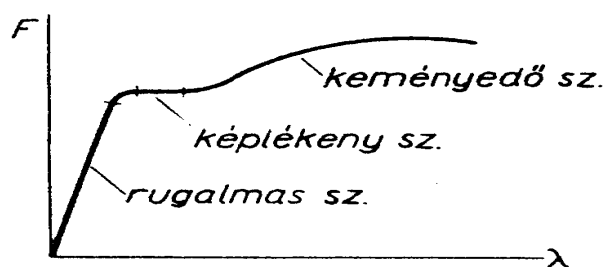
Izotrópia: az anyag fizikai tulajdonságai egy-egy pontban függetlenek az iránytól. Tehát például a szilárdsági tulajdonságok különböző irányokban mérve ugyanazon értékekkel jellemezhetők.

Rugalmasság: a test deformációi, alak és méretváltozásai, a testre ható erők eltávolítását követően eltűnnek.

A fenti anyagtulajdonságok többé-kevésbé jellemzőek (jelentékeny eltéréseket találunk a fánál 1.6.) a szilárd testekre, melyeket a jövőben csak „test”-ként említünk.

Hogy az utolsóként említett tulajdonság mennyiben jellemzi a szerkezeti anyagokat, arra vonatkozólag kísérlet, elsősorban az ún. húzó (nyomó) kísérlet adhat választ.

A kísérlet lényege: rúd alakú próbatestet alkalmas terhelő eszköz segítségével, változtatható erő hatásának teszünk ki. Egyidejűleg mérve a próbatest  $\lambda$  hosszváltozását és a próbatestre ható  $F$  erőt, tapasztalati úton előállítjuk az  $F=F(\lambda)$  függvény grafikonját (1. ábra). A kísérlet tanulsága szerint, viszonylag nagy  $F$  értékekig lineáris a kapcsolat  $F$  és  $\lambda$  között. A grafikon lineáris kapcsolatot mutató része a rugalmas szakasz.



1. ábra

Az ezt követő – nagyjából „vízszintes” – grafikondarab a képlékeny szakasz.

Itt tetemes méretváltozást találunk anélkül, hogy az erőt növelni kellene.

A harmadik, ún. keményedő szakaszon további méretváltozást csak növekvő erő árán érünk el. Ezt követően már a próbatest nem minden része vesz részt egyenlően a deformálódásban.

Valamilyen helyen a próbatest elvékonyodik, majd elszakad. Amint látható, a deformálódás és a terhelés közötti kapcsolatot bonyolult, közelebbről pontosan nem ismert függvény írja le. Ezért a valóságos anyag viselkedését idealizálva, lineáris kapcsolatot tételezünk fel a hosszváltozás és a terhelő erő között. Igaz, hogy az anyag matematikai modelljének tekinthető  $F=c \lambda$  függvény csak viszonylag kis  $\lambda$  - tartományban tekinthető jó közelítésnek, de a műszaki gyakorlatban előforduló szerkezetekben fellépő deformációk többnyire ebbe a szakaszba esnek. Így a fenti egyszerűsítő föltevés elfogadható.

## 1.2. Vektorok III.

Azt mondjuk, hogy az  $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$  vektoroknak egy  $\bar{\mathbf{b}}$  vektor lineáris kombinációja, ha  $\bar{\mathbf{b}}$  előállítható

$$\bar{\mathbf{b}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n$$

Alakban, ahol az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  skalárok.

A sík bármely vektora előállítható két, nem párhuzamos vektorának lineáris kombinációjaként, a térbeli vektorok bármelyike előállítható három nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként.

A továbbiakban szükség lesz a vektoranalízis néhány fogalmára.

Vektor-skalár függvény:  $\bar{\mathbf{y}}(x)$ , olyan függvény, mely az  $x$  skálárhoz vektort rendel.

Az  $\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n$  vektorsorozat konvergens és határértéke  $\bar{\mathbf{y}}_0$ , jelölése:  $\lim \bar{\mathbf{y}}_n = \bar{\mathbf{y}}_0$ , **vagy**  $\bar{\mathbf{y}}_n \rightarrow \bar{\mathbf{y}}_0$ , ha tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén, a vektorokat azonos kezdőpontból felmérve a vektorsorozat  $n > N(\varepsilon)$  indexű elemei az  $\bar{\mathbf{y}}_0$  vektor végpontjai körül írt  $\varepsilon$  sugarú gömb belsejébe mutatnak.

Tétel: a vektor-skalár függvénynek pontosan akkor van határértéke az  $x_0$  helyen, ha a koordinátáinak van határértéke. A függvény határértékének koordinátái a koordináták határértékei.

## 1.3. Feszültség

### FESZÜLTSGVEKTOR

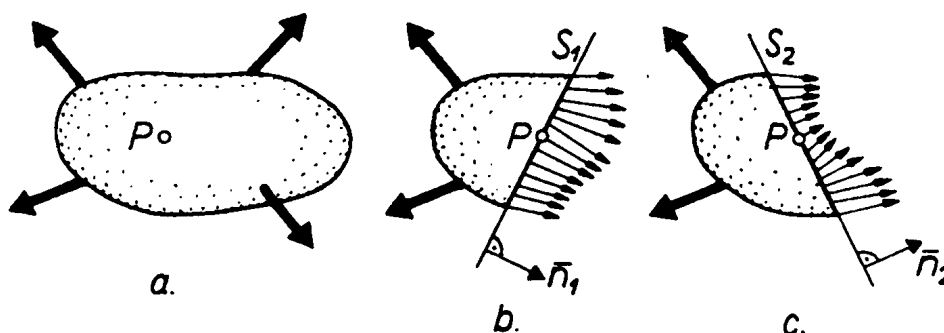
Szemléletesen nyilvánvalónak tűnik, hogy egy egyensúlyi erőrendszerrel terhelt test pontjaiban általában nem ugyanakkora a tönkremenetel (törés, nyíródás) veszélye.



2.ábra

Például a 2. ábrán látható test A pontjában ez a veszély nagyobbnak tűnik, mint a B pontban, noha ezt a sejtést szabatosan indokolni még nem igen tudnánk. Az anyag részecskéi hatást, belső erőket gyakorolnak egymásra. E belső erők nagysága és

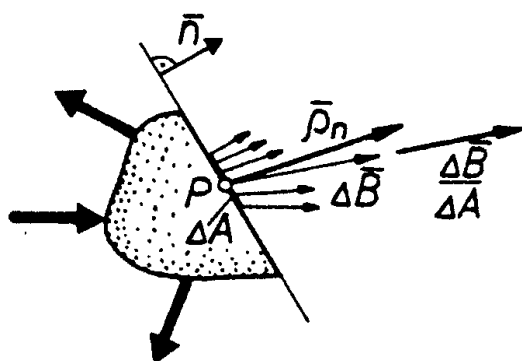
megoszlása a test különböző helyein más és más lehet. Próbáljunk most matematikai jellemzést találni arra a kérdésre, hogy egy egyensúlyi erőrendszerrel terhelt test valamely belső P pontjában – annak kis környezetében – hogyan oszlanak meg a belső erők (3. ábra).



3.ábra

Erre a következő lehetőség kínálkozik: vágjuk át gondolatban a testet egy a P-n átmenő tetszőleges  $S_1$  síkkal, s távolítsuk el a test „jobbra” levő részét (3/b. ábra). A megmaradt bal

oldali rész egyensúlyának fenntartásához a metszetszícületen azt a megoszló erőrendszert kell működtetni, melyet az eltávolított rész gyakorolt reá az átvágást megelőzően (ezt a megoszló erőrendszert ezúttal apró nyilak érzékeltetik). A 3/c ábra azt szemlélteti, hogy a P ponton átmenő (ugyancsak tetszőleges)  $S_2$  síkkal a belső erők egy másik rendszerét tárhatjuk fel. A két ábrarészlet  $S_1$  illetve  $S_2$  síkját egy-egy olyan egységvektorral ( $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ ) is megadhatjuk, melyek az említett síkokra merőlegesek és a síkok által kettéosztott térnek a testet nem



4.ábra

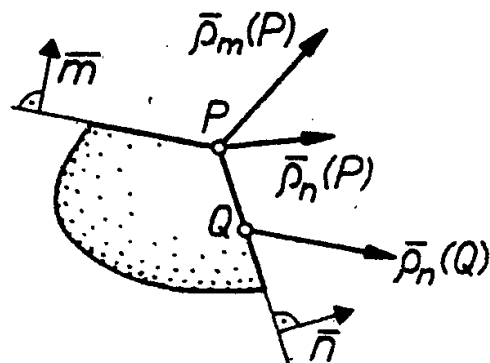
tartalmazó részébe mutatnak. Hogy az adott P pont valamely  $\bar{n}$  normálvektorú S síkján ébredő belső erők irányáról és nagyságáról pontosabb képet kapjunk – mégpedig P környékén – vegyük az S sík P-t tartalmazó,  $\Delta A$  területű darabjára ható belső erők eredőjét,  $\Delta B$ -t (4. ábra).

Ennek vektora önmagában még nem sokat mond, ha nem tudjuk, hogy mekkora területen megoszló erők eredőjét jellemzi.

A  $\frac{\Delta \bar{B}}{\Delta A}$  mennyiség azonban már bizonyos mértékig felvilágosítást nyújt a  $\Delta A$  területen ható belső erők megoszlásáról. A P-beli viszonyok pontos jellemzésére adott  $\bar{n}$  esetén a  $\bar{\rho}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta A}$  mennyiség, a P-től és  $\bar{n}$ -től egyaránt függő feszültségvektor alkalmas. A

feszültség  $\frac{\text{erő}}{\text{terület}}$  dimenziójú mennyiség, egysége pascal:  $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$ . A gyakorlat számára alkalmasabb a megapascal használata:  $1\text{MPa}=1\text{N/mm}^2$ .

A feszültség nem tévesztendő össze az igénybevétellel. Ez utóbbi egy metszetre, a feszültség pedig a metszet egy pontjára vonatkozik. Az 5. ábra azt szemlélteti, hogy adott ponton átmenő különböző síkokhoz különböző feszültségvektorok:  $\bar{\rho}_n(\mathbf{P})$ ,  $\bar{\rho}_m(\mathbf{P})$ , és adott sík különböző pontjaihoz is általában különböző feszültségvektorok tartoznak:  $\bar{\rho}_n(\mathbf{Q})$ .



5.ábra

A feszültségvektor különböző lehetséges felbontásai közül különösen fontos a normálissal egyező állású és az arra merőleges, vagyis a metsző síkba eső összetevőkre történő felbontás.

Legyen az  $\bar{n}$  normálvektorú (P-t tartalmazó) sík és az  $\bar{n}$ ,  $\bar{\rho}_n$  sík metszésvonalában felvett egységvektor  $\bar{m}$  (6. ábra). Ekkor  $\bar{\rho}_n$  felbontható a következőképpen:

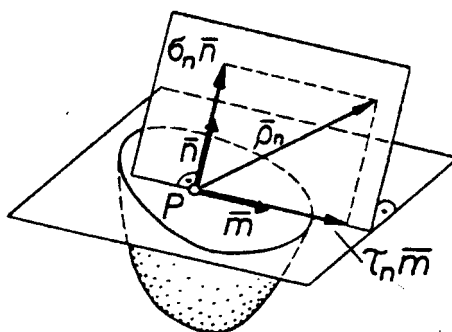
$$\bar{\rho}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n = \sigma_n \bar{n} + \tau_n \bar{m}.$$

$\bar{\sigma}_n$  : normális feszültség.

$\bar{\tau}_n$  : nyíró, vagy csúsztató feszültség.

A  $\sigma_n, \tau_n$  feszültségkomponenseket gyakran szintén így nevezik.

A fenti elnevezéseket később meg fogjuk indokolni.



6.ábra

## KAPCSOLAT A FESZÜLTÉGVEKTOROK KÖZÖTT

Felvetődik a kérdés, hogy milyen kapcsolat áll fenn egy adott ponthoz tartozó különböző feszültségvektorok között.

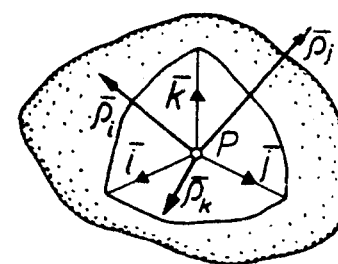
Erre ad feleletet a következő (bizonyítás nélkül közölt)

**Tétel:** a szilárd test tetszőleges P pontján áttett, három egymásra merőleges síkhoz tartozó feszültségvektorok a P-n átmenő bármely további síkhoz rendelt feszültségvektort meghatározzák.

Ha a tételben szereplő merőleges síkok-meghatározta  $\bar{\mathbf{i}}$ ,  $\bar{\mathbf{j}}$ ,  $\bar{\mathbf{k}}$  bázisvektorú koordináta rendszerben a tetszőleges sík normálvektorának koordinátái  $n_x, n_y, n_z$ , akkor

$$\bar{\rho}_n = n_x \bar{\rho}_i + n_y \bar{\rho}_j + n_z \bar{\rho}_k.$$

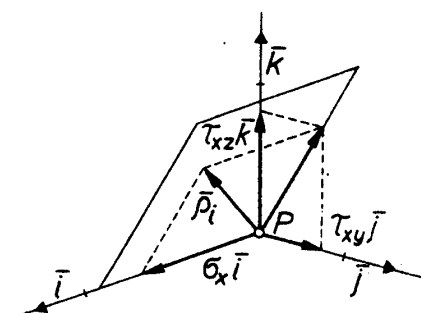
Ha tehát például a 7. ábrán<sup>\*1</sup> látható test belső P pontjából induló  $\bar{\mathbf{i}}$ ,  $\bar{\mathbf{j}}$ ,  $\bar{\mathbf{k}}$  egységvektorokhoz rendre a  $\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_j, \bar{\rho}_k$  feszültségvektorok tartoznak, akkor egy -az ábrán nem szemléltetett - tetszőleges  $\bar{\mathbf{n}}$  normálvektorhoz tartozó  $\bar{\rho}_n$ , a  $\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_j, \bar{\rho}_k$  vektorok olyan lineáris kombinációja, melyben a skaláris szorzók az  $\bar{\mathbf{n}}$  vektor iránykoszinuszai.



7.ábra

Hogy az imént látott fontos összefüggést számításokra is fel tudjuk használni, bontsuk fel a feszültségvektorokat az említett koordináta-rendszerben! A 8. ábrán egyetlen feszültségvektort, az  $\bar{\mathbf{i}}$  bázisvektorhoz tartozó  $\bar{\rho}_i$ -t bontottuk fel  $\bar{\mathbf{i}}$  irányú-, és az  $\bar{\mathbf{i}}$ -re merőleges összetevőre. Ez utóbbi azonban még tovább bontható  $\bar{\mathbf{j}}$  és  $\bar{\mathbf{k}}$  irányú összetevőkre.

Az indexezés szabálya az ábráról leolvasható: kettős index esetén az első a normális, a második a feszültség összetevő irányát jelöli. A  $\bar{\rho}_i$  vektor így írható fel a  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  feszültség komponensekkel:



8.ábra

$$\bar{\rho}_i = \sigma_x \bar{\mathbf{i}} + \tau_{xy} \bar{\mathbf{j}} + \tau_{xz} \bar{\mathbf{k}}.$$

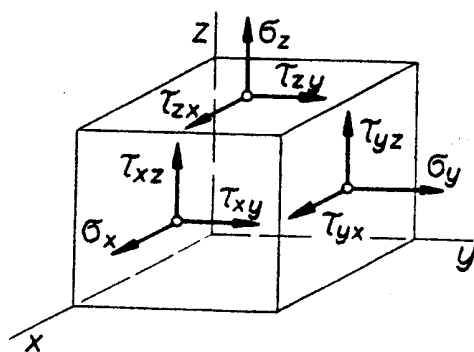
$\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_k$  hasonlóan bontható fel.

A P-beli feszültségállapot ismerete azt jelenti, hogy tetszőleges, P-ből induló  $\bar{\mathbf{n}}$  normálvektorhoz meg tudjuk határozni a hozzá tartozó  $\bar{\rho}_n$ -t<sup>\*2</sup>.

<sup>\*1</sup> Ezen és néhány további ábrán a külső erőket nem tüntetjük fel.

\*2 A feszültségállapotot a vizsgált ponthoz tartozó feszültségvektorok összességéként is definiálják.

A feszültségállapot meghatározásához szükséges három feszültségvektor szemléltetése a 9. ábrán látható módon történhet.



9.ábra

Az ábrázolási mód lényege: P környezetében egy kicsiny élhosszúságú téglalest lapjain szemléltetjük a feszültségkomponenseket. Elenyésző élhosszúságok esetén a koordináta-síkokkal párhuzamos hasáblapokon ébredő feszültségek azonosnak tekinthetők a P-hez tartozó feszültségekkel.

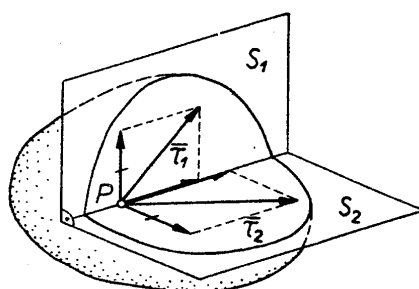
## DUALITÁS

Az eddigiek alapján azt gondolhatnánk, hogy a feszültségállapot ismeretéhez három feszültségvektor összesen 9 egymástól független számadatának, komponensének megadása szükséges. Valójában nem ez a helyzet, mert fennáll a  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  összefüggés, így a független komponensek száma 6.

Érvényes ugyanis az itt nem bizonyított alábbi

Tétel (a dualitás, kettősség tétele): a szilárd test tetszőleges belső P pontján átmenő két, egymásra merőleges síkhoz tartozó (P-beli) nyírófeszültségeknek a síkok metszésvonalára merőleges összetevői egyenlő nagyságúak. Tehát például a 10. ábrán  $\bar{\tau}_1$  és  $\bar{\tau}_2$ -nek az áthúzással jelölt összetevői egyenlő hosszúságúak.

Ezek után írjuk fel egy tetszőleges  $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$  normálvektorhoz a feszültségvektort, ha a feszültségállapot a  $\bar{\rho}_{io}(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ ,  $\bar{\rho}_j(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz})$ ,  $\bar{\rho}_k(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$  adatokkal van megadva.



10.ábra

$$\bar{\rho}_n = n_x \bar{\rho}_i + n_y \bar{\rho}_j + n_z \bar{\rho}_k = n_x (\sigma_x \bar{i} + \tau_{xy} \bar{j} + \tau_{xz} \bar{k}) + n_y (\tau_{yx} \bar{i} + \sigma_y \bar{j} + \tau_{yz} \bar{k}) + n_z (\tau_{zx} \bar{i} + \tau_{zy} \bar{j} + \sigma_z \bar{k})$$

$$\bar{\rho}_n = (n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}) \bar{i} + (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy}) \bar{j} + (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z) \bar{k} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k}.$$



Számítsuk ki az  $\bar{n}$ -hez tartozó  $\sigma_n$  és  $\tau_n$  feszültségkomponenseket is!

$$\sigma_n = \bar{n} \bar{\rho}_n = n_x c_1 + n_y c_2 + n_z c_3, \quad \tau_n = \sqrt{\rho_n^{-2} - \sigma_n^2}.$$

SAINT VÉNANT \* ELVE (\* ejtése: Szen Venan)

Tisztázni kell azt a kérdést, hogy a sztatikailag egyenértékű erőrendszerek szilárdságtanilag is „egyenértékűek”-e?

Erre felel a következő elv: szilárd testre ható, sztatikailag egyenértékű erőrendszerek bizonyos környezetben kívül szilárdságtanilag is egyenértékűek, vagyis azonos feszültségi és deformációs viszonyokat hoznak létre.

(A Saint Venant elv mindazonáltal nem teljesen általános érvényű).

Ha például a szakítógép pofái közé befogott próbatest feszültségi és deformációs viszonyait vizsgáljuk, azt találjuk, hogy e viszonyok a befogási helyek környezetében igen bonyolultak. E helyektől távol azonban olyanok, mintha a próbatest végein –befogó pofák által gyakorolt erőrendszerekkel egyenértékű- tengelyirányú húzóerők hatnának.

## FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTOK EGYMÁSRA HALMOZÁSA

Gyakorlatilag is fontos kérdés, hogy különböző egyensúlyi rendszerek hatására ébredő feszültségállapotok hogyan összegződnek.

Erre felel a következő

Tétel : Két egyensúlyi erőrendszer hatására a szilárd test tetszőleges pontjában, külön-külön keletkező feszültségek az erőrendszerek egyidejű működtetése esetén vektorálisan összegződnek.

Ennek alapján az is belátható, hogy ha az  $(F') \doteq 0$  és az  $(F'') \doteq 0$  erőrendszerek hatására létrejövő feszültségkomponensek valamely pontban  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$ , illetve  $\sigma''_x, \sigma''_y, \dots$  akkor az  $(F', F'') \doteq 0$  erőrendszer hatására fellépő feszültségállapot jellemzői az adott pontban:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x,$$

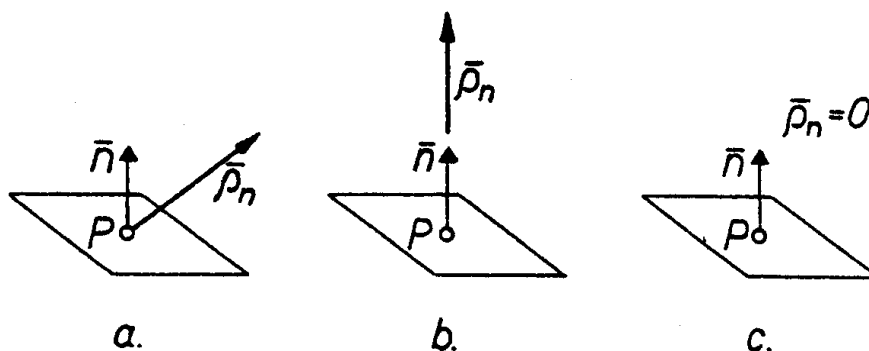
$$\sigma_y = \sigma'_y + \sigma''_y, \dots$$

Az egymásra halmozás eredménye az eredő feszültségi állapot, azokat a feszültségi állapotokat, amelyeknek eredője az adott feszültségi állapot, összetevő feszültségi állapotoknak mondhatjuk.

#### 1.4. Feszültségi állapotok

##### FESZÜLTÉGÁLLAPOT ADOTT PONTBAN

Hogy a feszültségi állapotokról pontosabb képet nyerjünk, gondoljuk meg a következőket: a test tetszőleges P pontján átmenő síkhoz képest a  $\bar{\rho}_n$  feszültségvektor általában nem különleges helyzetű (11/a. ábra).



11.ábra

Lehetséges azonban a P-n átmenő síkok között olyat is találni, melyhez képest speciális helyzetű (vagy méretű)  $\bar{\rho}_n$  tartozik. A 11/b ábrán  $\bar{\rho}_n$  merőleges a P-n átmenő síkra, a 11/c ábrán pedig a síkhoz  $\bar{\rho}_n = \bar{0}$  feszültségvektor tartozik. Egyszerűen jellemezhető mindkét eset, hiszen egyaránt érvényes rájuk, hogy  $\tau_n = 0$ . a P-n átmenő, ilyen tulajdonsággal rendelkező síkok a főfeszültségi síkok.

Tétel: Tetszőleges feszültségállapot esetén a vizsgált ponton átmenő síkok között mindig található legalább három, egymásra merőleges feszültségi sík.

Ha háromnál több ilyen sík van, akkor végtelen sok van. A főfeszültségi síkokhoz tartozó  $\sigma_n$  neve főfeszültség. A legáltalánosabb esetben három különböző főfeszültség létezik. Az (algebrai értelemben) egymás után következő három főfeszültséget így jelöljük:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

A feszültségállapotokat mármost a következőképpen osztályozhatjuk:

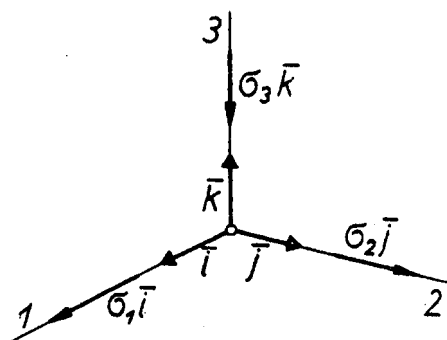
Térbeli feszültségállapot: mindhárom feszültség zérustól különbözik,

Síkbeli feszültségállapot: két főfeszültség különbözik zérustól,

Egytengelyű feszültségállapot: egy főfeszültség különbözik zérustól.

A szilárd test bármely pontjában felvehetünk három olyan egymásra merőleges  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  egységvektort, melyek főfeszültségi síkok normálvektorai. A három bázisvektor által kijelölt koordináta-rendszer tengelyeit. A feszültségi főtengeleket jelöljük úgy, hogy az 1,2,3 jelű

tengelyekhez a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  főfeszültségek tartozzanak (12. ábra).



12.ábra

Tegyük fel, hogy a feszültségállapot síkbeli, tehát pl.  $\sigma_3 = 0$ . Ekkor a tetszőleges  $\bar{n}$ -hez tartozó feszültségvektor az 1,2 síkban fekszik. Valóban:  $\bar{\rho}_n = n_x \sigma_1 \bar{i} + n_y \sigma_2 \bar{j}$ .

Hasonlóan látható be, hogy egytengelyű feszültségállapot esetén valamennyi  $\bar{\rho}_n$  egy egyenesbe esik.

## A FESZÜLTÉSÁLLAPOT ÁBRÁZOLÁSA

Egy adott pontbeli feszültségállapot szemléltetésére egyszerű és hasznos módszert dolgozott ki O.MOHR.

A módszer térbeli feszültségállapotra is alkalmazható, itt azonban most csak a síkbeli feszültségállapotot tárgyaljuk részletesen.

Tegyük fel, hogy  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  és  $\sigma_3 = 0$ .

Határozzuk meg az 1, 2 főfeszültségi síkban lévő  $\bar{n}$  egységvektorhoz rendelt  $\bar{\rho}_n$  feszültségvektort.

Mint láttuk,

$$\bar{\rho}_n = n_x \sigma_1 \bar{i} + n_y \sigma_2 \bar{j}.$$

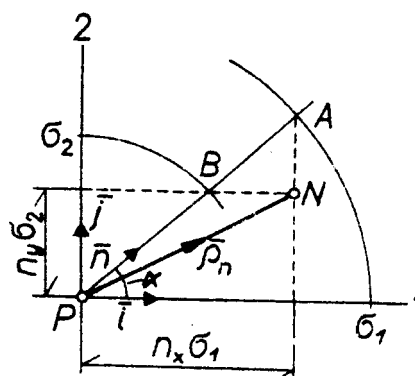
Ez a vektor könnyen megszerkeszthető!

Rajzoljunk P köré  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$  sugarú köröket.

E körök és  $\bar{n}$  egyenesének metszéspontjaiból a tengelyekkel párhuzamosokat húzva olyan N

ponthoz jutunk (13. ábra), melynek

koordinátái  $n_x \sigma_1$ ,  $n_y \sigma_2$  s így nyilván  $\bar{\rho}_n = \bar{P}\bar{N}$ .



13.ábra

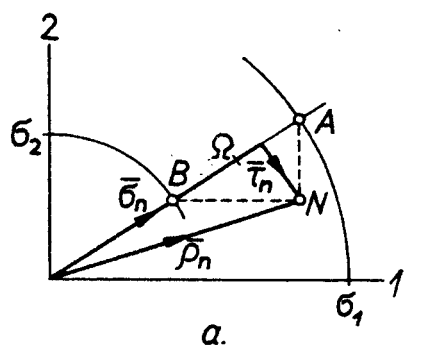
Aki az ellipszis és kör között fennálló merőleges affinitást ismeri, azt is leolvashatja az ábráról, hogy a P-beli feszültségvektorok végpontjai ellipszist alkotnak.

Bontsuk fel most  $\bar{\rho}_n$ -t a szokásos módon  $\bar{\sigma}_n$  és  $\bar{\tau}_n$  összetevőkre (14/a. ábra).

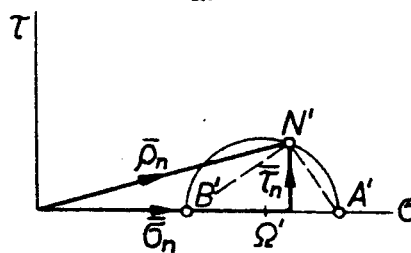
Ezután létesítsük a következő leképzést: minden N pontnak megfeleltetünk egy olyan N' pontot valamely  $\sigma - \tau$  koordináta rendszerben, melynek koordinátái  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$ . Azt állítjuk, hogy a középpontok egy félkörön lesznek.

Tetszőleges  $0 < \alpha < 90^\circ$  esetén az összetevőkre bontott  $\bar{\rho}_n$  feszültségvektor N végpontja egy a 14/a. ábrán szaggatott vonallal rajzolt A B N derékszögű háromszög főcsúcsa. Ha a e háromszöget átmásoljuk a  $\sigma - \tau$  koordináta rendszerbe, akkor A pont a  $\sigma_1$  koordinátájú A'-be, B meg a  $\sigma_2$  koordinátájú B'-be kerül függetlenül attól, hogy melyik  $\bar{n}$ -hez tartozó N képpont leképezéséről van szó. N pont az AB szakasz  $\Omega$  középpontjától

$$\overline{\Omega N} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



a.



b.

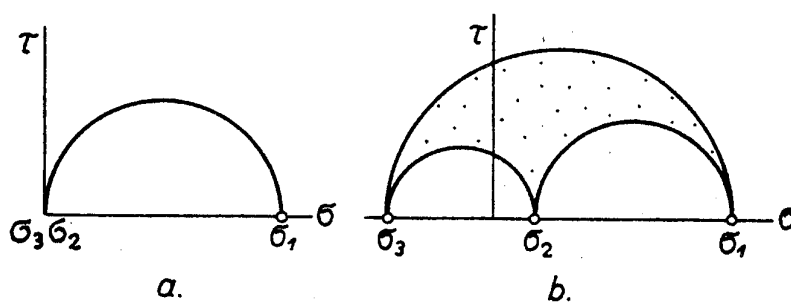
14.ábra

távolságra van, ennél fogva  $N'$  egy  $\Omega'$  középpontú,  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  sugarú félkörön lesz.  $\tau_n$ -nek nem tulajdonítunk előjelet ennél az ábrázolási módnál, ezért csak félkör, nem pedig kör adódik.

Megmutatható, hogy az  $A'B'$  végpontú félkörív minden pontja képpont.

Ha  $\sigma_1$  vagy  $\sigma_2$  negatív, akkor is hasonló gondolatmenet érvényes.

Egytengelyű feszültségállapot esetén a képpontok olyan félkört alkotnak, mely a  $\tau$  tengelyt érinti (15/a. ábra). Térbeli feszültségállapot esetén a képpontok halmaza a  $\sigma - \tau$  síkon egy félkörívek által határolt síkidom. A félkörívek végpontjainak koordinátái:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (15/b. ábra).



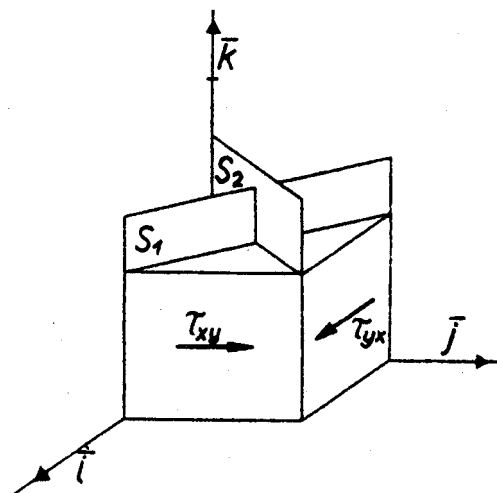
15.ábra

### Példa.

Adott a 16. ábrán szemléltetett feszültségállapot.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = 2 \text{ N/mm}^2.$$

Határozzuk meg az  $S_1, S_2$  síkon ébredő feszültséget és állapítsuk meg a feszültségállapot típusát.



16.ábra

Megoldás.

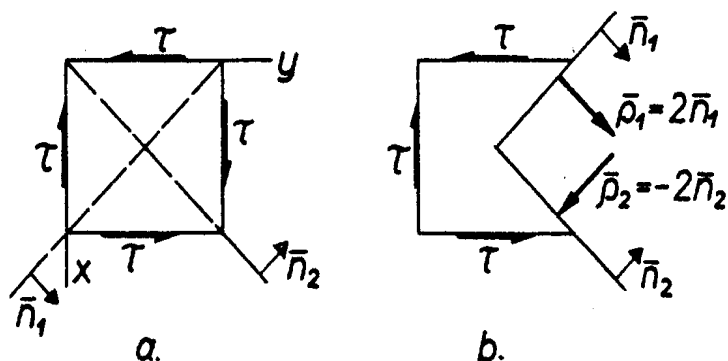
Az ábrázolás kényelme kedvéért felülnézetben is ábrázoltuk az elemi hasábot és az átlósíkok  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  normálisait (17.

ábra).

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j},$$

$$\bar{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}.$$

$$\bar{\rho}_i = \tau \bar{j}, \quad \bar{\rho}_j = \tau \bar{i}.$$



17.ábra

Így a tárgyalt tétel értelmében

$$\bar{\rho}_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \bar{i}, \quad \underline{\underline{\bar{\rho}_{n_1} = \tau \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j} \right] = \tau \bar{n}_1 = 2\bar{n}_1.}}$$

Hasonló számítással  $\underline{\underline{\bar{\rho}_{n_2} = -2\bar{n}_2.}}$

A 17/b ábra az  $S_1, S_2$  síkokon ébredő feszültségvektorokat szemlélteti. Az  $xy$  sík főfeszültségi sík, s a hozzátartozó feszültség zérus. Az átlósíkok ugyancsak főfeszültségi síkok, könnyen belátható, hogy

$$\sigma_1 = 2N/\text{mm}^2, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -2N/\text{mm}^2,$$

a feszültségállapot síkbeli.

## 1.5. HOOKE-törvény (Ejtése: HÚK)

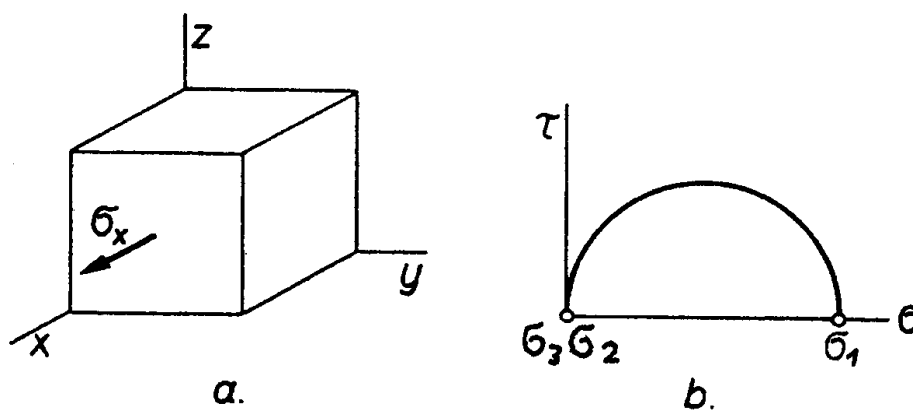
### DEFORMÁCIÓ

A feszültségelmélet néhány alapvető fogalmának megismerése után azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy a szilárd test a rá ható erők hatására miképpen deformálódik, vagyis milyen hossz-szög, azaz méretváltozások, rövid deformációk lépnek fel.

A deformációk elméletét a feszültségeknél is rövidebben tárgyaljuk.

Lényegében azt vizsgáljuk meg, hogy egy derékszögű hasáb miképpen deformálódik két különleges esetben.

Legyen először a hasáb két párhuzamos lapjának minden pontjában a feszültségállapot egytengelyű, s a főfeszültség  $\sigma_x$ . A hasáb terhelését a 18/a. a feszültségállapotot a 18/b. ábra szemlélteti. Számos esetben a terhelt szerkezetekben alkalmas módon elkülönített és eléggé kicsiny méretű hasáb alakú rész terhelése ilyennek tekinthető.



18.ábra

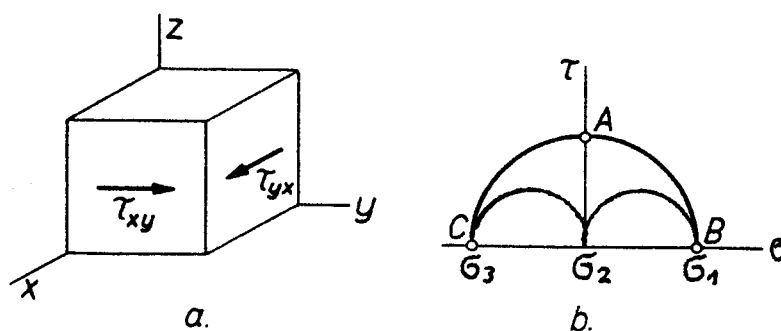
A tapasztalatból ismeretes, hogy ilyen körülmények között a hasáb úgy deformálódik, hogy élei párhuzamosak maradnak eredeti helyzetükkel, a lapszögek nem változnak meg, csupán az élhosszak növekednek, illetve csökkennek.

Ha a hasábnak az  $x$  tengellyel, illetve a feszültségvektorokkal párhuzamos élhossza  $l_0$ , a hosszváltozás  $\Delta l$ , akkor a deformálódás mértékéül az

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ hányadost, a fajlagos hosszváltozást tekintjük, amelynek}$$

előjele húzásnál pozitív, nyomásnál, negatív.

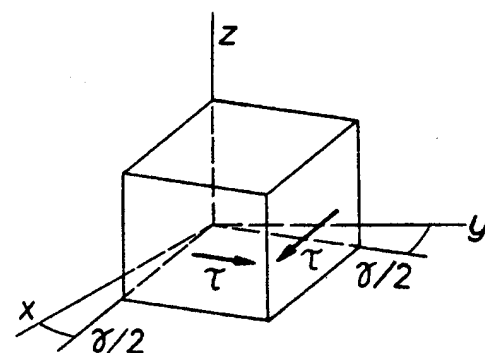
Legyen ezután a hasáb terhelése a 19. ábra szerinti, azaz a terhelt hasáb minden pontjában azonos, síkbeli feszültségi állapot uralkodik.



19. ábra

Az  $\bar{i}$  normálishoz minden pontban  $\tau_{xy}\bar{j}$  a  $\bar{j}$  normálishoz minden pontban  $\tau_{yx}\bar{i}$  feszültség tartozék. A 19/b ábrához megjegyezzük, hogy az  $\bar{i}, \bar{j}$  normális síkok ábrázoló pontja A, az átlósíkoké pedig a B és C pont.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a  $\tau$  feszültségekkel terhelt hasáb deformálódása úgy történik, hogy az összes élhossz változatlan marad, egyes lapszögek azonban megváltoznak. Ezt szemlélteti a 20. ábra. A deformálódás mértékéül a szomszédos lapszögek  $\gamma$  változását tekintjük. A 18/a. és 19/a. ábrák a normális és csúsztató feszültség elnevezéseket is érthetővé teszik. A  $\sigma_x$  feszültség a hasáb normális irányú megnyúlását okozza, a  $\tau_{yx}$  feszültség hatására pedig két-két párhuzamos hasáblap egymáshoz képest elcsúszik.



20. ábra



## HOOKE-TÖRVÉNY

Arra a kérdésre, hogy az imént tárgyalt deformációk milyen kapcsolatban állnak az anyagi minőséggel és a feszültségekkel, a tapasztalat ad választ.

Ha karcsú rúd alakú próbatestet fogunk be szakítógéppel a pózfák közé és egyenletesen növekvő erőt működtetünk, akkor a megfogási helyektől elég távol, a rúdban alkalmas elkülönített kis hasáb pontjaiban jó közelítéssel azonos, egytengelyű feszültségállapot uralkodik. A hasábnak a próbatest tengelyére merőleges lapjain ébredő feszültség  $\sigma = \frac{F}{A}$ , ahol F a pillanatnyilag érvényes húzóerő, A a próbatest keresztmetszet-területe. Az  $\varepsilon$  deformációt úgy állapítjuk meg, hogy a próbatesten kijelölt (tengellyel párhuzamos) szakasz, s annak  $\Delta \ell = \lambda$  hosszváltozása hányadosát képezzük.

A feszültség és a deformáció között fennálló kapcsolat fenti kísérletünk szerint a következő:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

Ahol E a vizsgált anyagra jellemző állandó, dimenziója erő/terület, neve: rugalmassági tényező. Tájékoztató adat: acél anyagokra

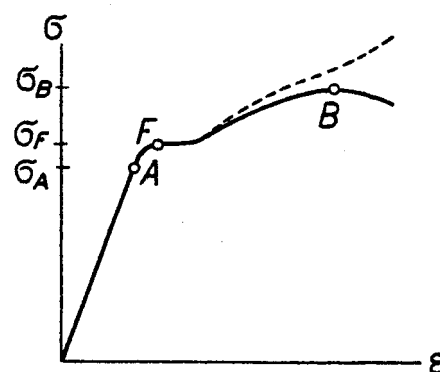
$$E \approx 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 (\text{MPa}) = 200 \text{ GPa}.$$

A nyírás következtében előálló deformáció és a nyírófeszültség között hasonló kapcsolat áll fenn (20. ábra):

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

ahol G a vizsgált anyagra jellemző állandó, dimenziója erő/terület, neve: nyíró rugalmassági tényező (csúsztató rugalmassági tényező). Tájékoztató adat: acél anyagokra  $G \approx 80 \dots 85 \text{ GPa}$ .

Ez a két - HOOKE-tól származó - törvény korlátozott érvényű. Ha egy húzott rúd deformációja és a rúdkeresztmetszetre ható feszültség közti kapcsolatot (pontosabban a  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  függvényt)



21.ábra

ábrázoljuk, akkor a szerkezeti féanyagokra a 21. ábrán látható grafikont kapjuk, mely – alkalmas léptékválasztás esetén – egybevág a húzódiagrammal.

A grafikon jellegzetes pontjaihoz a következő feszültségek tartoznak:

Addig a pontig lineáris a kapcsolat  $\sigma$  és  $\varepsilon$  közt, vagyis érvényes a Hooke-törvény.

$\sigma_A$  neve: arányossági határ. Gyakorlatilag a  $\sigma_A$  feszültséggel esik egybe  $\sigma_R$  a rugalmassági határ, vagyis az a feszültség, melyet meg nem haladó feszültségek esetén a rúd még visszanyeri eredeti méretét, tehát rugalmasan viselkedik.

F: e pontot elérve a feszültség növelése nélkül is, hirtelen nagy méretváltozást tapasztalunk.

$\sigma_F$  neve: folyáshatár.

B: a diagram legfelső pontja.  $\sigma_B$ : az anyag szilárdsága (húzószilárdság. Hasonlóan értelmezhető a nyomószilárdság./

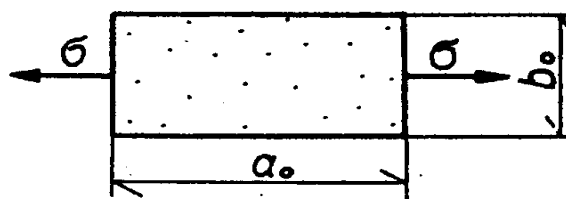
$\sigma = \frac{F}{A}$  névleges feszültségértékek mindenkor felmérésével nyerjük, ahol A a rúd eredeti

keresztmetszet területe. A deformálódás során azonban a keresztmetszet-terület csökken, a rúd valamely helyén szemmel látható gyors keresztmetszet csökkenés lép fel. Ha a valóságos feszültséget, azaz az erő és a pillanatnyilag érvényes keresztmetszet-terület hányadosát képeznénk, akkor a 21. ábrán szaggatottan rajzolt tényleges grafikont kapnánk.

A folyt-acélhoz hasonló anyagokat, melyeknél elegendően nagy feszültségeknél maradandó deformációk és folyási határ észlelhető, szívós anyagoknak nevezik. Azokat az anyagokat, melyek csak rugalmas deformálódásra képesek, folyási határt nem mutatnak, rideg anyagoknak nevezzük. Ilyen az öntöttvas és a beton.

## KAPCSOLAT E és G KÖZÖTT

A húzásnak alávetett próbatest hosszváltozása a keresztirányú méretek változásával jár együtt. Például 22. ábrán látható hasáb  $b_0$  mérete is megváltozik (csökken) a  $\sigma$  feszültségek hatására. Ha a  $b_0$  méret megváltozása  $\Delta b$ , a kereszt-irányú



22.ábra

### fajlagos méretváltozás

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta b}{b_0}.$$

A deformálódás két jellemzőjéből,  $\varepsilon$ -ból és  $\varepsilon_k$ -ből képzett

$$\left| \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right| = \nu$$

Hányados a POISSON\*-féle tényező (Ejtése: Poaszon). Használatos ennek reciproka, az m POISSON-féle szám is. Tájékoztató értéke acél anyagokra kb. 0,3.

Az E, G,  $\nu$  anyagállandók között levezethető az alábbi összefüggés:

$$G = \frac{E}{2} \frac{1}{1+\nu}.$$

### ÁLTALÁNOS HOOKE-TÖRVÉNY

Ha a 23. ábrán látható hasábra csak a  $\sigma_x$  feszültségek hatnak, akkor

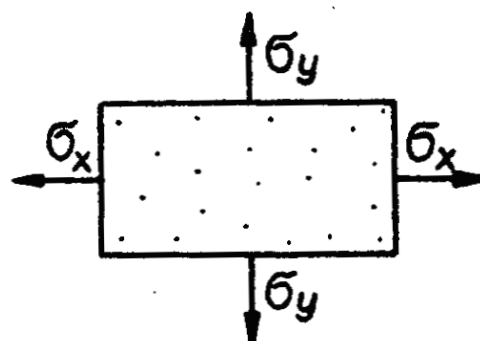
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Hosszváltozás lép fel. Ha csak  $\sigma_y$  feszültségek

működnek, akkor az  $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$  nagyságú, y –

irányú megnyúláson kívül x –irányú rövidülés

lép fel, a keresztirányú fajlagos hosszváltozás



23.ábra

$$\varepsilon_{k_x} = -\mu \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

( $\varepsilon_{k_x}$  és  $\varepsilon_y$  ellentétes előjelű).

A  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  feszültségek együttes hatására az x-irányú fajlagos hosszváltozás:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y].$$

Ugyanígy látható be, hogy térbeli feszültségállapot esetén

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Ez az általános HOOK-törvény. Hasonló képlet írható fel az y, z irányokkal kapcsolatban is:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Ha a 20. ábrán szereplő  $\gamma$  szög helyett  $\gamma_{xy}$  jelöli az x, y síkbeli szögváltozást, akkor a csúsztató feszültségek és a deformáció közti kapcsolat:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \text{ A másik két síkban mért szögváltozások hasonlóan:}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \text{ illetve } \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

## **1.6. A természetes faanyag szilárdságtani jellemzése**

### A FAANYAG ORTOTRÓP TERMÉSZETE

A természetes fa – mint ismeretes – nem izotróp, sőt nem is homogén anyag. A mechanikai tulajdonságok irányfüggőek, például a nyomószilárdság a rostok irányában más, mint a rostokra merőlegesen. Az inhomogenitás abban nyilvánul meg, hogy a faanyag különböző helyein más-más mechanikai jellemzőket mérhetünk. A szijácsban mért értékek eltérnek a gesztben mért értékektől, de egy-egy évgyűrűn belül is (tavaszi és őszi pászta) különbségeket találunk.

A fa elemi szilárdságtana nem alapozható a fém anyagok szilárdságtanához hasonlóan két anyagállandóra, E és G-re.

A faanyag mechanikai tulajdonságait jellemző adatokat három anatómiai főirányban kell ismerni. Ezek az irányok egyben mechanikai főirányok is.

A természetes fa anyagának minden pontjában felvehető egy, a három anatómiai főirányba mutató derékszögű koordináta-rendszer (a szabálytalan növesű fa esetében is).

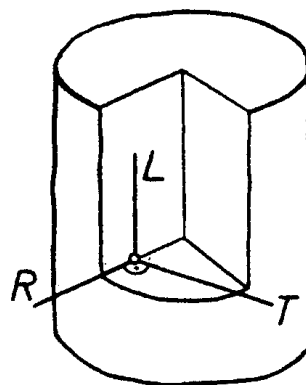
Tengelyei a következők:

L: longitudinális, vagy hosszirányú (rostirányú) tengely, melynek állása a faanyag rostirányával egyezik,

R: radiális vagy sugárirányú tengely, mely az adott ponthoz tartozó vastagsági növekedés iránya.

T: tangenciális vagy érintőirány, mely merőleges az előbbi két tengelyre és érinti az illető ponthoz tartozó évgyűrűt.

A faanyagnak a fenti irányokban mért tulajdonságait a szóban forgó mennyiség jele mellé tett betűvel, vagy  $\parallel$  illetve  $\perp$  szimbólumokkal különböztetjük meg.



24.ábra

Az olyan anyagot, melynek fizikai tulajdonságai (egy-egy pontban) három egymásra merőleges irányban különböznek, ortotróp anyagnak nevezik. (24.ábra)

A természetes fa is ilyen.

A fa rugalmas viselkedésének leírásához az E, G anyagállandókat is mindhárom irányban, illetve koordináta síkban kell ismerni. Mivel a fa rostjainak L-irányú teherbírása nagy, de a rá merőleges irányban kicsiny, különösen a rostirányú szilárdsági adatok jelentősek.

## BEFOLYÁSOLÓ TÉNYEZŐK

A fa és faalapú anyagok sok tényezőtől függő mechanikai tulajdonságait az elemi szilárdságtan módszereivel nem lehet levezetni. Legtöbbször meg kell elégednünk a szóban forgó tulajdonságot leíró függvény kísérleti úton nyert grafikonjával. A szilárdságtani jellemzőket befolyásoló fontosabb tényezők adott fafaj esetén a következők:

- a faanyag nedvességtartalma,
- a terhelőerő iránya, (a főirányhoz képest),

- a terhelés időtartama,
- a faanyag fajsúlya.

Egyéb tényezők közt megemlítjük a fa biológiai állapotát, a hőmérsékletet és a fában lévő göcsök méretét, eloszlását.

Az eddig ismert anyagállandókkal (E,G) kapcsolatban rámutatunk néhány olyan sajátságra, melyek csak a faanyagot jellemzik. Elsősorban E-re szorítkozunk.

Az  $E_L$ ,  $E_R$ ,  $E_T$  adatok közül az első jelentős, meghatározása nyomó-, illetve hajlító kísérlettel történik.

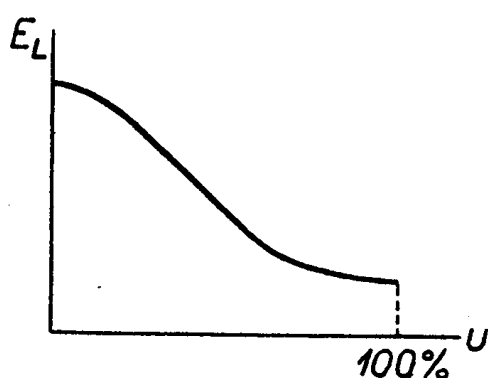
A  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{RT}$  a megfelelő síkban mért nyírórugalmassági tényezők. Például  $G_{LR}$  az L, R síkra vonatkozik.

A  $\nu_{LR}$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{RT}$ , Poisson-hányadosok első indexe az alkalmazott feszültség irányát, a második az oldalirányú deformációt adja.

A fenti mennyiségekre vonatkozó számadatok táblázatokban találhatóak. (\* Például: Faipari Kézikönyv, Műszaki Kiadó, Bp. 1976. Wood Handbook, US. Forest Products Laboratory).

Tájékoztató adat hazai fafajainkra:

$E_L \approx 100000 \text{ daN/cm}^2$ . A húzókéssel nyert ( $E_L$ ) rugalmassági modulus általában a nedvességtartalomnak csökkenő függvénye (25. ábra).



25.ábra

A húzókéssel nyert rugalmassági modulus ( $E_L$ ) kapcsolata néhány befolyásoló tényezővel az alábbi:

$E = E(u)$ : kapcsolat a nedvességtartalommal.

Az összefüggést a 25. ábra érzékelteti. A 8-25 % nedvességtartalmi tartományban használható az

$$E_2 = E_1 [1 - 0,02(u_2 - u_1)]$$

képlet.

Megemlítjük, hogy a faanyag nedvességtartalmát általában  $u$ -val, térfogatsúlyát  $\gamma$ -val jelölik.

$E = E(\gamma)$ : kapcsolat a térfogatsúllyal.

Közelítőleg az  $E = K(\gamma - k)$  lineáris kapcsolat érvényes, ahol  $K$ ,  $k$  fafajtól függő állandók.

### **1.7. A szilárdsági méretezés alapelvei**

(Felhasznált irodalom: Sályi-Fáber: Szilárdságtani Példatár (5. fejezet).

#### A SZILÁRDSÁGI MÉRETEZÉS KÉT LEHETŐSÉGE

Bármilyen szerkezet, műszaki létesítmény megtervezésekor többféle követelményt – műszaki, gazdasági, esztétikai – kell egyidejűleg kielégíteni.

A műszaki követelmények röviden így foglalhatók össze: a létesítendő szerkezet meghatározott ideig megbízhatóan kell, hogy megfeleljen rendeltetésének.

A továbbiakban csak a műszaki, ezen belül a szilárdságtani követelményekkel foglalkozunk. Ezek lényege: a szerkezetre a rendeltetésszerű használat közben nem szabad olyan erőknek hatni, melyek a szerkezet funkcióját gátló változásokat, deformációkat hoznának létre. Veszélyes változás a törés, repedés, a maradandó alakváltozás.

A szilárdsági méretezés feladata az említett szilárdságtani követelmények kielégítése.

A szilárdsági méretezés alapjául két út kínálkozik:

- a) elméleti úton, vagy kísérlettel megállapítjuk azokat a terheléseket, melyek a szerkezetben veszélyes változásokat okoznak, majd pedig a várható terhelést az előbbi szerkezetjellemező terheléssel összehasonlítjuk. Egyenes rúd esetén pl. szerkezetjellemező a törést okozó húzóerő.
- b) a szerkezetenként elvégzendő kísérletek végrehajtását mellőzhetjük a következő gondolatmenettel: a szerkezetet biztosan megóvjuk a tönkremeneteltől, ha biztosítjuk, hogy egyetlen pontjában sem indulnak meg veszélyes változások. Tehát a szerkezet egészének vizsgálata helyett a szerkezet különböző pontjainak elemi környezetét vizsgáljuk.

Az előbbi méretezési mód szerkezetjellemezői helyett most a méretezést helyi jellemzőkre, egyes veszélyes pontokban uralkodó feszültségállapotokra alapozzuk. Ilyen jellemzők például az anyag tulajdonságait tükröző olyan feszültségállapotok, melyek szakadást, vagy maradandó deformációt okoznak. E második szemlélet szerint lényegében a valóban ébredő feszültségállapotok és a lokális jellemzők összehasonlításából áll a méretezés.

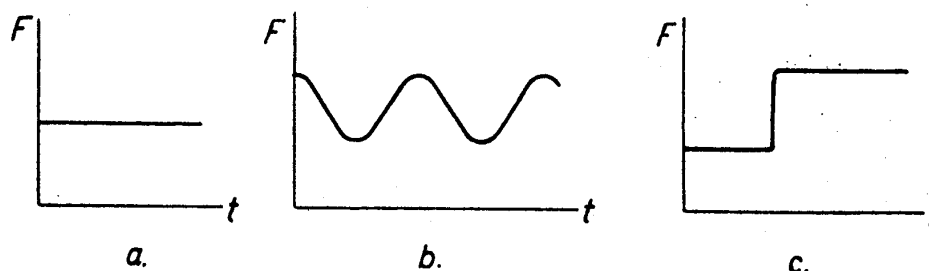
A két méretezési szemlélet nem egyenértékű. Az első a testben fellépő feszültségi állapotok összességéből ítéli meg a terhelést, a lokális szemlélet viszont az egész szerkezetről annak egyetlen pontjában, a veszélyes pontban uralkodó feszültségi állapot alapján mond ítéletet.

Ma még a lokális jellemzők használata a szokásos, noha a szerkezet jellemzőkre alapozott méretezés a megbízhatóbb. A lokális jellemzők alkalmazása gyakran túlzott, szükségtelen óvatosságra vezet.

## MÉRETEZÉS MEGENGEDETT FESZÜLTSG ALAPJÁN

A méretezés előfeltétele, hogy mindazokat a terheléseket ismerjük, melyek a szerkezetet érni fogják várható élettartamán belül. Ez persze, általában nem lehetséges.

- Bizonytalanság állhat fenn a terhelés nagysága és időbeli lefolyása tekintetében is. Pedig ez utóbbi is igen lényeges szempont. Nem mindegy, hogy a terhelés az időben állandó-e, más szóval statikus (26/a. ábra), vagy pedig az időben változó, dinamikus (26/b,c ábra). A dinamikus terhelés lehet ismétlődő (26/b ábra) és lökésszerű (26/c ábra).



26.ábra

- Bizonytalanság állhat fenn a terhelő erők helyzetében is. Például centrikusan ható erővel számolunk, miközben bizonyos excentricitás jelentkezik.

- Gyártási hibákkal, méreteltérésekkel is számolni kell.

- Anyaghibákra, minőségi eltérésekre ugyancsak tekintettel kell lenni, hiszen a leggondosabb technológia sem biztosíthatja az anyagminőség állandóságát.



Mindezek figyelembevételével a méretezés úgy történhet (a lokális szemlélet alapján), hogy a szerkezeteinkben csak olyan feszültségállapot kialakulását engedjük meg a veszélyes pontban, melynek az igénybevétel szempontjából szóba jövő feszültség adata az anyag szilárdságának tört része.

Pontosabban: felvesszünk egy – nem szükségképpen egész –  $n$  számot, a biztonsági tényezőt és megfelelő méretkialakítással, illetve anyagmegválasztással gondoskodunk arról, hogy  $\sigma_B$  helyett maximálisan az

$$\sigma_m = \frac{\sigma_B}{n}$$

megengedett feszültség lépjen fel az anyagban, s hasonlóan beszélhetünk  $\tau_m$ -ről is.

A megengedett feszültség  $\sigma_m = \frac{\sigma_F}{n}$  értelmezése is szokásos. A megengedett feszültségek értékeit szabványok, táblázatok tartalmazzák.

## TERHELÉSMÓDOK ÉS KIFÁRADÁSI HATÁR

A szilárdsági méretezés szempontjából különös gondosságot igényelnek az olyan esetek, midőn a terhelés az időben változó, például periodikus.

Tapasztalatból ismert tény, hogy a tönkremenetelt okozó sztatikus terhelésnél jóval kisebb terhelés is veszélyes lehet, ha sűrűn ismétlődik.

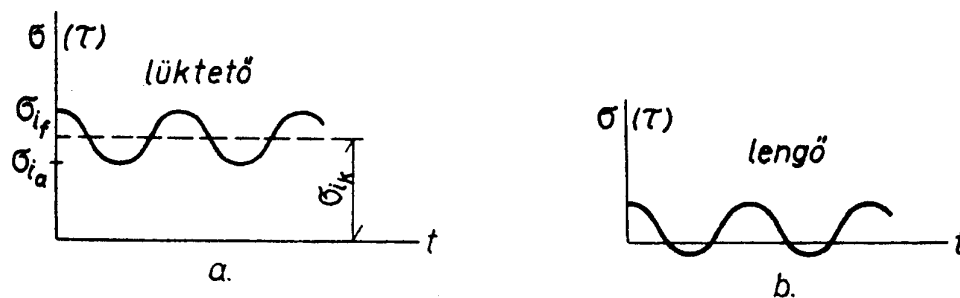
Ilyenkor az ismétlődő feszültség egy  $\sigma_{i_a}$  alsó és egy  $\sigma_{i_f}$  felső feszültséghatár között ingadozik.

Középfeszültségen a  $\sigma_{i_k} = \frac{\sigma_{i_a} + \sigma_{i_f}}{2}$  ill.  $\tau_{i_k} = \frac{\tau_{i_a} + \tau_{i_f}}{2}$  feszültséget értjük.

Az időben változó periodikus terhelés lehet lüktető, mikor a feszültség zérus és egy fix érték között, vagy azonos előjelű két rögzített érték között váltakozik (27/a. ábra).

Lengő terhelésről akkor beszélünk, ha a terhelés, illetve a feszültség két különböző előjelű érték között váltakozik (27/b ábra).

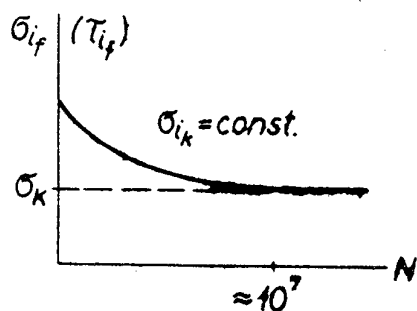
Az anyag viselkedését periodikusán ismétlődő terhelés esetén fárasztóvizsgálatokkal lehet tisztázni.



27.ábra

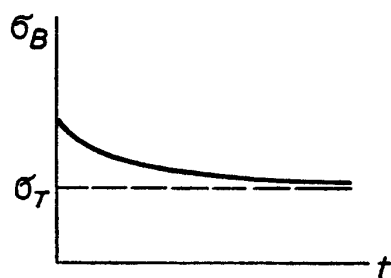
Ezek lényege: több egyenlő méretű próbatestet azonos  $\sigma_{ik}$  közepes feszültséggel terhelnek, de más-más  $\sigma_{if}$  maximális feszültségig és megállapítják az egyes  $\sigma_{if}$  feszültségekhez tartozó ismétlések  $N$  számát, amely a tönkremenetelhez szükséges.

A  $\sigma_{if} = \sigma_{if}(N)$  függvények grafikonjai a WÖHLER-görbék. Bizonyos – a terhelésmódtól is függő -  $\sigma_{if}$  alatt akárhány ismétlődés sem okoz törést. Azt a legnagyobb feszültséget, melyet



28.ábra

még végtelen sokszor el tud viselni az anyag,  $\sigma_k$  kifáradási határnak nevezik (28.ábra). A terhelés időtartamának sztatikus igénybevétel esetén is szerepe van. Előfordul, hogy valamely sztatikus terhelést egy szerkezet  $t_1$  ideig elvisel, de  $t_2 > t_1$  ideig már nem. A kísérletek tanúsága szerint ugyanis az anyag szilárdsága a terhelés időtartamának is függvénye. Ha például a  $\sigma_B = \sigma_B(t)$  függvényt ábrázoljuk, faanyagoknál a 29. ábrán látható grafikont kapjuk.



29.ábra

Az a legnagyobb  $\sigma_T$  feszültség, melyhez  $\infty$  hosszú terhelési idő tartozik az anyag tartós szilárdsága. Ez fánál a  $t=0$ -hoz tartozó sztatikus szilárdságnak mintegy 55 %-a.

## ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

Az 1. fejezetben található sztatikai és feszültségelméleti anyag ismeretét feltételezve, rátérünk az elemi szilárdságtan alapjainak tárgyalására. Ebben a fejezetben fokozottan mutatunk rá a fatechnológiai vonatkozásokra.

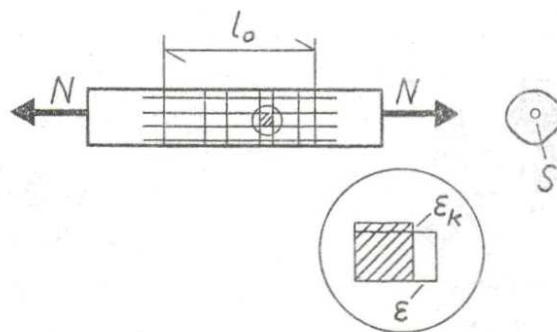
### 2.1. Húzás és nyomás

#### HÚZÓ (NYOMÓ) IGÉNYBEVÉTEL

A műszaki gyakorlatban előforduló rúd alakú testek, szerkezeti elemek, gyakran húzásra vagy nyomásra vannak igénybe véve. Valamely szelvény igénybevétele húzás, ill. nyomás, ha a ( $B_j$ ) erőrendszer eredője a tengellyel azonos hatásvonalú erő. Másképpen: a bal oldali erőrendszer egyenértékű egy olyan erővel, melynek hatásvonalja a tengely. Az igénybevétel nagysága szelvényről szelvényre változhat, gondoljunk például egy önsúlyával is terhelt függőleges helyzetű rúdra vagy kötélre. Mivel a húzó és nyomó igénybevétel szilárdságtani szempontból hasonlóan tárgyalható, főként a húzó igénybevétellel foglalkozunk ebben a tárgyponban. Már most megítéljük azonban, hogy a rúd alakú test tengely irányú mérete a keresztmetszeti méretek többszöröse, akkor szilárdságtani szempontból lényeges különbség van a két fajta igénybevétel között. Megállapításaink tehát nyomó igénybevétel esetében csak akkor érvényesek, ha ún. Zömök rudacról van szó. Általában akkor tekinthetünk egy rudat zömöknek, ha kisebb keresztmetszeti méretének ötszörösénél nem nagyobb a hossza.

#### DEFORMÁCIÓ

Ha egy egyenes tengelyű, tetszőleges keresztmetszetű rúdra a tengelyével párhuzamos vonalakat karcolunk és ugyancsak kijelöljük néhány keresztmetszet határoló vonalát, akkor a rúd felületén egy derékszögű vonalhálózatot nyerünk (30. ábra).



30.ábra

Ha most a rugalmas anyagú rudat a tengellyel egybeeső hatásvonalú  $N$ ,  $N$  erővel terheljük az ábra szerint, s az erők támadáspontja eléggé messze van a vonalhálózattól, a következőket tapasztaljuk: a vonalhálózat továbbra is a tengellyel párhuzamos egyenesekből és ezeket merőlegesen metsző síkgörbékéből áll. Csupán az egymással párhuzamos vonalak távolsága változik meg.

Feltesszük, hogy nem csupán a keresztmetszetek határoló vonalai maradnak síkgörbék a deformálódás után, hanem maguk a keresztmetszetek is a tengelyre merőleges síkidomokká deformálódnak. A deformálódás közelebbi jellemzése céljából jelöljük ki a rúd egymástól  $l_0$  távolságra lévő két keresztmetszetét. Deformálódás után e két szelvény távolsága  $\Delta l$  értékkel megváltozik. A tapasztalat szerint az  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  hányados - **a fajlagos hosszváltozás** -  $l_0$ -tól

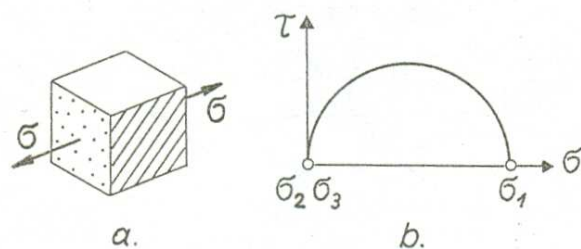
független állandó érték. A rúdban elkülönített valamely elemi kockának (1. ábra kinagyított részlete) a tengellyel párhuzamos élei megnyúlnak, az egyéb élei megrövidülnek (nyomás esetén éppen fordítva). Egységnyi élhosszúságú kockát véve a hosszváltozások:

$\varepsilon$  és  $\nu = -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}$ ;  $\nu$  (ejtsd nú)-a Poisson tényező melynek kb. értéke 0,3, az egységnyi

hosszváltozásra jutó keresztirányú hosszváltozást adja meg.

Az elemi kocka lapszögei a deformálódás után is derékszögek.

## FESZÜLTSG



31.ábra

A húzott rúdszakasz tetszőleges pontjában fellépő feszültségállapotot a kérdéses pont kis környezetét tartalmazó elemi kocka deformálódásának ismeretében határozhatjuk meg.

Az imént látottak, valamint az 1.4. szakaszban tanultak alapján megállapíthatjuk, hogy az elemi kocka fentebb tárgyalt deformálódását a 31/a. ábrán pontozással jelölt két párhuzamos kockalapon fellépő  $\sigma$  feszültségeknek kell tulajdonítanunk. A többi hasáblap

feszültségmentes. A korábbiak ismeretében megállapíthatjuk, hogy a hasáblapok főfeszültségi síkok, a főfeszültségek  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . A feszültségállapot a vizsgált pontban egytengelyű. A feszültség állapotot MOHR-körrel szemlélteti a 31/b. ábra. Ha az 1. ábrán látható húzott rúd keresztmetszet-területe  $A$ , akkor a bal oldali rúdszakasz egyensúlyából  $\int_{(A)} \sigma dA - N = 0$ . Mivel a keresztmetszet minden pontjában ugyanakkora  $\varepsilon$ , azonos  $\sigma = \varepsilon E$

feszültség lép fel, az egyensúlyi egyenlet így is írható:

$$\sigma A - N = 0, \text{ ill. :}$$

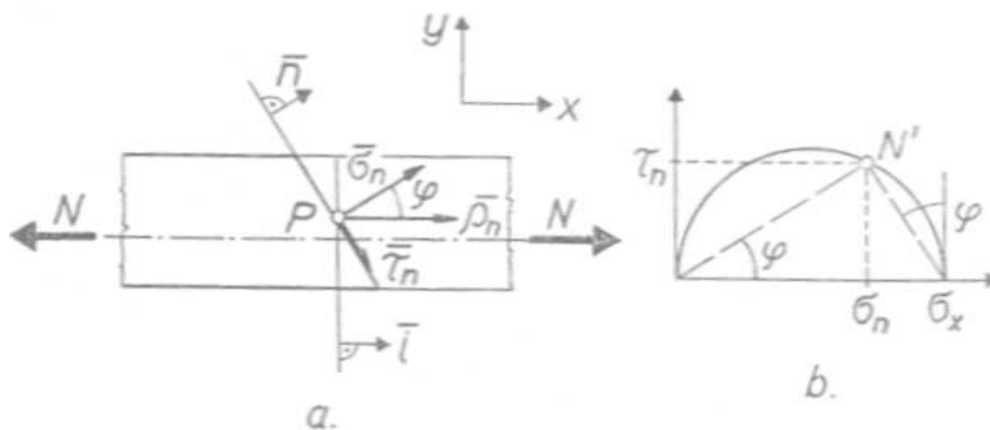
$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

A rúd valamely ferde metszetén ébredő feszültségeket a következőképpen számíthatjuk ki: a rúd P pontján (32.a ábra) átmenő  $\bar{i}$  normálisú síkon ébredő feszültségvektor, melyet az ábra nem szemléltet:

$$\bar{\rho}_x = \sigma_x \bar{i} = \frac{N}{A} \bar{i} \quad A \bar{\rho}_y,$$

$\bar{\rho}_z$  főfeszültségek zérussal egyenlők, tehát a  $\bar{\rho}_n$  számítására tanult összefüggés szerint (1.3):

$$\bar{\rho}_n = n_x \bar{\rho}_x = \cos \varphi \cdot \sigma_x \bar{i} = \frac{N}{A} \cos \varphi \bar{i}.$$



32.ábra

A  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  komponenseket legegyszerűbben így számíthatjuk:

$$\sigma_n = |\bar{\rho}_n| \cos \varphi = \frac{N}{A} \cos^2 \varphi, \quad \tau_n = |\bar{\rho}_n| \sin \varphi = \frac{N}{A} \sin \varphi \cos \varphi.$$

A 32/b. ábra a P-beli egytengelyű feszültségállapotot szemlélteti MOHR-körrel. A  $\bar{\rho}_n$  feszültségvektornak megfelelő képpontot a  $\varphi$  szögnek az ábra szerinti felmérésével kaphatjuk meg. Ez rögtön belátható, ha az  $N'$  pont koordinátáit trigonometriai összefüggésekkel kiszámítjuk.

### VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RUDAK

Rúd alakú szerkezeti elemeken olykor hirtelen átmeneteket, furatokat, beszúrásokat, hornyokat, közös néven bemetszéseket kell kialakítani (33. ábra).

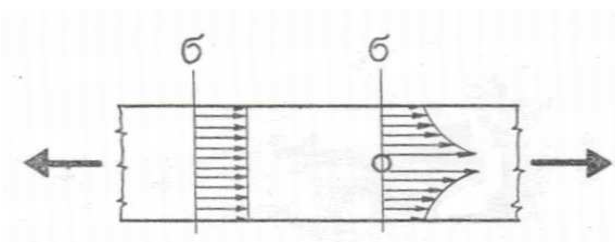


33.ábra

A bemetszési helyek környezetében fellépő feszültségeket nem lehet az állandó, ill. mérsékelten változó keresztmetszetű rudakra érvényes képlettel számítani.

Ezekben a helyeken ugyanis a feszültségviszonyok bonyolultak, az elemi szilárdságtan eszközeivel nem tárgyalhatók.

A mérések szerint az ilyen helyeken a feszültségek megoszlása nem egyenletes, a feszültségek maximális értéke a húzóerő/keresztmetszet-terület hányadossal jellemzett átlagérték többszöröse is lehet. Ezt a tényt szemlélteti az 34. ábra, melyen a bemetszést egy furat jelenti. Az ábra feltünteti egy a bemetszéstől távoli keresztmetszet – közelítőleg egyenletes – feszültségmegoszlását és a bemetszés keresztmetszetében érvényes, hirtelen változó feszültségmegoszlást.



A feszültség szélső értékét feszültségcsúcsnak nevezik, értékét általában méréssel határozzák meg.

34.ábra

A rugalmas anyagú húzott – vagy más módon igénybevett – szerkezeti elemek bemetszésre, hirtelen méretváltozásra rendkívül érzékenyek. A feszültségcsúcs elérheti az anyag szilárdságát, s ekkor repedés keletkezik. Ennek szélén ismét feszültségcsúcs alakul ki, s a repedés tovább terjed, a szerkezet tönkremegy.

## MÉRETEZÉS

Ellenőrzéskor azt kell kimutatni, hogy a  $\sigma_{\max}$  maximális feszültség, vagyis a  $\sigma_1$ -főfeszültség (nyomás esetén  $|\sigma_3|$ ) nem haladhatja meg a  $\sigma_m$  megengedett feszültséget. Ha az igénybevétel szempontjából veszélyes keresztmetszet területe  $A$ , a veszélyes szelvényben fellépő normálerő  $N$ , akkor a rúd megfelel, ha:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_m.$$

Tervezéskor a terhelés, valamint a megengedett feszültség ismeretében a minimális szükséges keresztmetszet-terület a következő:

$$A_{sz} = \frac{N}{\sigma_m}.$$

Gazdaságos kialakítás esetén a tényleges keresztmetszet ennél sokkal nagyobb nem lehet.

## HÚZOTT (NYOMOTT) RUDAK DEFORMÁCIÓJA

Húzott (nyomott) rudakból álló szerkezetek csomópontjai elmozdulásának számításánál gyakran találkozunk a következő feladattal: ismeretes egy húzott rúd  $l$  hossza, keresztmetszetének  $A$  területe, a rúd anyagának  $E$  rugalmassági tényezője és a rúdban ébredő  $N$  erő, meghatározandó a rúd  $\Delta l$  hosszváltozása.

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Nl}{AE}.$$

Azzal az esettel, midőn  $N$  vagy a keresztmetszet területe változó, a későbbiekben foglalkozunk.

## HŐMÉRSÉKLETVÁLTOZÁSKOR ÉBREDŐ FESZÜLTTSÉGEK

Amint az a fizikából ismeretes, egy  $l$  hosszúságú rúd hőmérsékletének  $\Delta t$  értékű megváltozásakor fellépő  $\Delta l$  hosszváltozás a következőképpen számítható:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t,$$

ahol  $\alpha$  a rúd anyagára jellemző állandó, az  $1/C^\circ$  mértékegységű hőtágulási együttható. ( Acélra:  $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} 1/C^\circ$ , fára:  $\alpha = 3-9 \cdot 10^{-6} 1/C^\circ$  )

Ha a változó hőmérsékletű rúd hosszváltozását meggátoljuk, rúdban feszültségek ébrednek. Ezek abból a feltételből számíthatók, hogy a hossz nem változik. A fajlagos hosszváltozás a hőmérsékletváltozás következtében  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t$  lenne. Ezt megakadályozni a rúdvégeken fellépő  $\sigma = E\varepsilon$  nagyságú feszültség képes, ha  $E$  a rúd anyagának rugalmassági tényezője.

A feszültség tehát

$$\sigma = \alpha \Delta t E.$$

A rúdvégeken ható erő  $F = A \sigma = A \alpha \Delta t E$ , ahol  $A$  a rúd keresztmetszet-területe.



## A TERMÉSZETES FAANYAG HÚZÓ ÉS NYOMÓ IGÉNYBEVÉTELE

A természetes faanyag rostirányú szakítószilárdsága  $\sigma_{sz}$  általában nagyobb, mint a nyomószilárdsága:  $\sigma_n$ . Néhány tájékoztató adat:  $u=15\%$  nedvességtartalom esetén:

	$\sigma_{sz}$	$\sigma_n$	
Tülevelűek:	35.....150	40.....55	N/mm <sup>2</sup>
Lágy lombosfák:	20.....35	30.....50	N/mm <sup>2</sup>
Középkemény lombos fák:	25.....135	55.....70	N/mm <sup>2</sup>

A nyomószilárdság kapcsolatát a különböző befolyásoló tényezőkkel az alábbiakban foglaljuk össze.  $\sigma_n = \sigma_n(u)$ : kapcsolat a nedvességtartalommal.

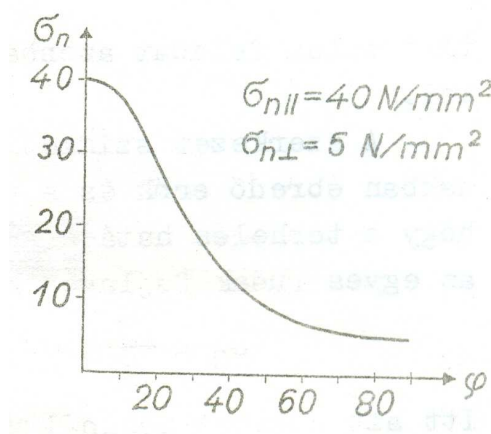
Ha  $u_1, u_2$  nedvességtartalomhoz a  $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}$  nyomószilárdságok tartoznak, akkor  $\sigma_{n_2} = \sigma_{n_1} [1 + \alpha(u_1 - u_2)]$ , ahol  $\alpha$  fafajtól függő, 0,03-0,06 között állandó.

$\sigma_n = \sigma_n(\varphi)$ : kapcsolat a nyomó erő iránya és a rostirány által bezárt szög között (35. ábra).

Ha  $\sigma_{//}$  és  $\sigma_{\perp}$  a rosttal párhuzamos, ill. arra merőleges nyomószilárdság, akkor a  $\sigma_n(\varphi)$  függvény közelítőleg:

$$\sigma_n(\varphi) = \frac{\sigma_{//} \sigma_{\perp}}{\sigma_{//} \sin^{2,5} \varphi + \sigma_{\perp} \cos^{2,5} \varphi}$$

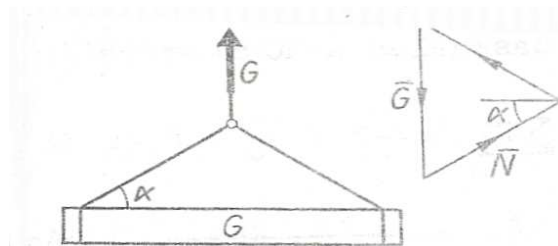
$\sigma_n = \sigma_n(\rho)$ : kapcsolat a testsűrűséggel. A nyomószilárdság egyenesen arányos a testsűrűséggel.



35.ábra

**1.Példa**

A 36. ábrán látható rönköt kenderkötél segítségével emeljük. Határozzuk meg a kötélszükséges  $d$  átmérőjét, ha  $\alpha = 20^\circ$ ,  $G=10$  kN,  $\sigma_m = 600$  N/cm<sup>2</sup>.

**36.ábra**

Megoldás:

A kötélagak húzásra vannak igénybe véve. Ha a kötélsúlyát elhanyagoljuk, az egyes kötélagokban ébredő erők a következők:

Függőleges kötélag:  $K=G$ , ferde kötélagak:  $N = \frac{G}{2 \sin \alpha}$ .

Könnyen belátható, hogy az  $\alpha < 30^\circ$  esetén a ferde kötélagokban,  $\alpha > 30^\circ$  esetén a függőleges kötélagokban ébred nagyobb erő.

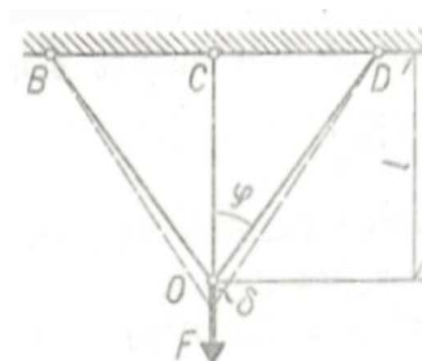
$$A_{sz} = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{N}{\sigma_m} = \frac{G}{2 \sigma_m \sin \alpha}, \quad d = \sqrt{\frac{2G}{\pi \sigma_m \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000}{\pi \cdot 600 \cdot 0,342}} = \underline{\underline{5,57 \text{ cm}}}.$$

**2.Példa**

A 37. ábrán látható,  $\varphi, l$  adatokkal meghatározott szerkezet csuklós rúdjaik keresztmetszeterülete  $A$ , anyaguk rugalmassági modulusa  $E$ . A szerkezet  $O$  pontjában  $F$  erő működik. Állapítsuk meg az  $O$  pont elmozdulását és a rudakban ébredő erőket!

Megoldás.

Könnyű igazolni, hogy sztatikai megfontolásokkal a rúderők nem határozhatók meg. E sztatikailag határozatlan feladat azonban megoldható szilárdságtani eszközökkel.

**37.ábra**

A szerkezet szimmetriájából következik, hogy a szélső rudakban ébredő erők és e rudak megnyúlásai egyenlők. Tegyük fel, hogy a terhelés hatására az O pont  $\delta$  értékkel elmozdul. Ekkor az egyes rudak fajlagos hosszváltozásai a következők:

$$\varepsilon_C = \frac{\delta}{l}, \quad \varepsilon_B = \varepsilon_D = \delta \cos \varphi : \frac{l}{\cos \varphi}.$$

Itt azt a tényt használtuk ki, hogy  $\delta \ll l$ , s ezért a DO rúdnak a függőleges rúddal bezárt szöge a deformálódás után is majdnem  $\varphi$ . Most írjuk fel a  $\sum F_{iy} = 0$  sztatikai egyenletet, felhasználva a HOOKE-törvényt!

$$\sum F_{iy} = -F + F_C + F_B \cos \varphi + F_D \cos \varphi = -F + EA \frac{\delta}{l} + 2EA \frac{\delta \cos^3 \varphi}{l} = 0$$

$$\delta = \frac{Fl}{AE(1 + 2\cos^3 \varphi)}. \quad \text{A rúderő: } F_C = EA \frac{\delta}{l}, \quad F_C = \frac{F}{1 + 2\cos^3 \varphi},$$

$$F_B = F_D = \frac{F \cos^2 \varphi}{1 + 2\cos^3 \varphi}.$$

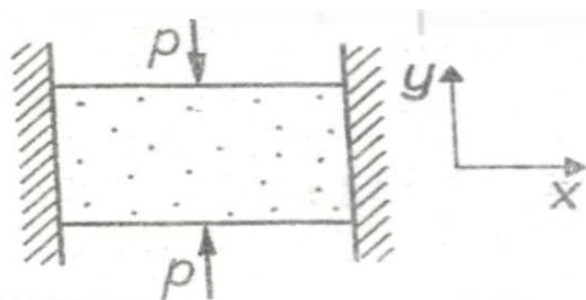
Méretezzük a rudakat! Legyen  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\sigma_m = 100 \text{ N/mm}^2$ ,  $F = 80000 \text{ N}$ , alkalmazzunk egyenlő szárú L szelvényt. A legnagyobb erő a függőleges rúdban ébred,

$$A_{sz} = \frac{F_C}{\sigma_m} = \frac{F}{\sigma_m (1 + 2\cos^3 30^\circ)} = \frac{80000}{100 \left[ 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right]}$$

$$A_{sz} = 348 \text{ mm}^2 = 3,48 \text{ cm}^2.$$

Az MSZ 328-67 alapján a megfelelő szelvény L 45x45x4. Ennek a szelvénynek a területe  $3,49 \text{ cm}^2$ .

### 3.Példa



38.ábra

Merev falak közé hasábot helyezünk a 38. ábra szerint. A hasáb anyagára  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,3$ . A hasáb két párhuzamos lapjára  $p=10 \text{ N/mm}^2$  nyomás hat.

Milyen fajlagos megnyúlások keletkeznek  $x$  és  $y$  irányban, mekkora a hasáb lapjain fellépő feszültség?

Megoldás.

Nyilvánvaló, hogy  $\underline{\varepsilon_x = 0}$ ,  $\underline{\sigma_y = -100 \text{ N/mm}^2}$ .

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0, \quad \sigma_x = \mu\sigma_y, \quad \underline{\sigma_x = -30 \text{ N/mm}^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_y, \quad \underline{\varepsilon_y = -0,00043}.$$

#### 4.Példa

Állapítsuk meg, hogy mekkora erők ébrednek a 2. példában szereplő szerkezet rúdjaiban, ha a szerkezet hőmérsékletét az összeszerelés után  $\Delta t$  értékkel megnöveljük. Legyen rudak rugalmassági tényezője  $E$ , hőtágulási együtthatója  $\alpha$ , keresztmetszet-területe  $A$ . Az  $F$  koncentrált erő most nincs jelen.

Megoldás.

Először lássuk be, hogy a felmelegedett szerkezet középső rúdja húzott lesz! Ez a rúd magában  $\Delta t\alpha$  értékkel nyúlna meg. Ha a szerkezetből eltávolítanánk a középső rudat, a csomópont elmozdulása a felmelegedés után  $\Delta t\alpha \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Delta t\alpha$ . A három rúd együtteséből álló

szerkezetben tehát a középső rúd húzott. Legyen a húzóerő  $Q$ .

Ekkor a középső rúd hosszváltozása:

$$\delta = \Delta t\alpha l + \frac{Ql}{AE}.$$

A ferde rúdban ébredő erő  $\frac{Q}{2 \cos \varphi}$ , s a ferde rúd megnyúlása:

$$\delta_1 = \Delta t \alpha \frac{l}{\cos \varphi} - \frac{Q}{2AE \cos^2 \varphi}.$$

Mivel  $\delta_1 = \delta \cos \varphi$ ,

$$\Delta t \alpha \frac{l}{\cos \varphi} - \frac{Ql}{2AE \cos^2 \varphi} = (\Delta t \alpha l + \frac{Ql}{AE}) \cos \varphi,$$

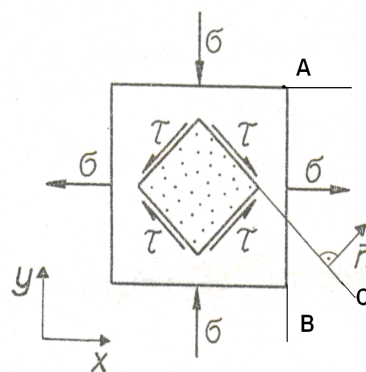
$$\text{ebből: } Q = \frac{\Delta t \alpha \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)}{1 + \frac{1}{2 \cos^3 \varphi}} AE.$$

A ferde rudakban ébredő erők  $Q / 2 \cos \varphi$

## 2.2. Nyírás

### NYÍRÁS MINT FESZÜLTSGÁLLAPOT

Valamely rúd tetszőleges szelvényében az igénybevétel nyírás, ha a (B<sub>j</sub>) erőrendszer (Lásd: Mech. I.; II.6. fejezet) eredője a szelvény síkjában ható erő, melynek hatásvonalja a súlyponton megy át. Másképpen: a bal oldali erőrendszer egyenértékű egy olyan erővel, melynek hatásvonalja átmegy a súlyponton és benne van a szelvény síkjában. Ha az igénybevétel eléggé nagy, a rúdnak a szelvény által elválasztott két része egymáshoz képest eltolódhat, amint azt az ollóval való nyírás során tapasztaljuk (Lásd: Mech. I. 157. ábra). Tiszta nyíró igénybevétel úgyszólván sohasem fordul elő. A 39. ábra azonban azt mutatja, hogy megvalósítható olyan terhelés, melynek hatására egy test bizonyos metszetein csak nyírófeszültségek lépnek fel. Az ábrán pontozással jelölt kocka oldallapjai, ill. a velük párhuzamos síkmetszetek ilyenek. Ennek belátására számítsuk ki például az  $\bar{n}$  normálisú kockalapon ébredő feszültséget!



39.ábra

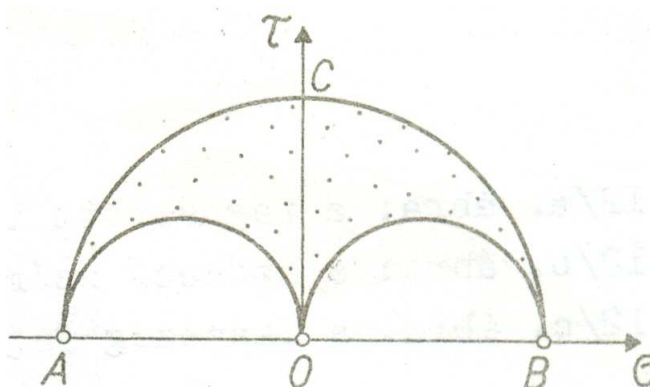
$$\bar{\rho}_n = n_x \bar{\rho}_x + n_y \bar{\rho}_y, \text{ ahol}$$

$$n_x = n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\rho}_x = \sigma \bar{i},$$

$$\bar{\rho}_y = -\sigma \bar{j}, \quad \bar{\rho}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (\bar{i} - \bar{j})$$

A kockapappal párhuzamos vektor, vagyis a lapon  $\tau$  feszültségek ébrednek a kocka négy élére merőlegesen, s az ezen élekre merőleges lapok feszültségmentesek.

Ha a test egy pontjának kicsiny környezetét tartalmazó kis kocka lapjain csak  $\tau$  feszültségek ébrednek, mint a 10. ábrán, azt mondjuk, hogy a vizsgált pontban a feszültségállapot nyírás. A 10. ábrán látható testek minden pontjában nyírás a feszültségállapot. Tanulságos belátni, hogy a pontok feszültségállapotának MOHR-féle diagramja a 40. ábra. A 39. ábra síkjára merőleges síkokhoz tartozó képpontok az ABC köríven vannak, a papír síkjával párhuzamos síkok főfeszültségi síkok, ábrázoló pontjuk az origó. Valamely tetszőleges állású síkokhoz tartozó képpont a pontozott síkidomba esik.



40.ábra

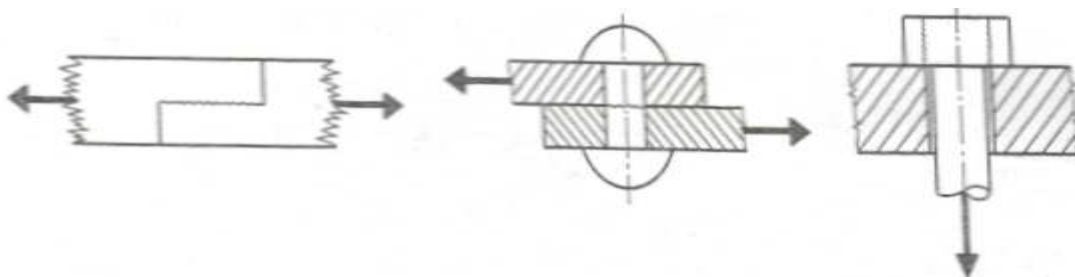
## DEFORMÁCIÓ

A nyírással, mint feszültségállapottal, lényegében az 1.5. fejezetben megismerkedtünk. Láttuk, hogy a csupán  $\tau$  feszültségek hatása alatt álló kis kocka deformálódása a lapszögek megváltozásából áll, az élhosszak nem változnak meg. A deformáció mértékének tekinthető  $\gamma$  szög (Lásd: 1. fejezet 20. ábra) a  $\tau$  feszültségek nagyságától, s az anyag rugalmas tulajdonságaitól függ:  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , ahol  $G$  az anyagra jellemző állandó, az anyagnyíró rugalmassági tényezője.

## NYÍRÓ IGÉNYBEVÉTEL

A műszaki gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy – nem feltétlen rúd alakú – test valamely metszetén, ill. egy a test belsejében kijelölhető felületdarabján közelítőleg nyírásnak vehető a pontok feszültségállapota.

Ezt a metszetet, ill. felületdarabot a továbbiakban nyírt idomnak nevezzük, s az ábrákon recézett vonallal szemléltetjük. Általában akkor vehetjük úgy, hogy a test, ill. szerkezeti elem igénybevétele nyírás, ha a testet terhelő erőrendszer a testnek a nyírt idom által elválasztott két (vagy több) részét egymással ellentétes irányokba igyekszik elcsúsztatni. Ezen azt értjük, hogy ha a terhelés elég nagy, fennáll annak veszélye, hogy a nyírt idom mentén a test részei egymáshoz képest eltolódnak. A fentieket a 41. ábra világítja meg.



41/a. ábra: a ragasztott lapolt gerenda nyírt idoma téglalap,

41/b. ábra: a szögecs szárának nyírt idoma körlap,

41/c. ábra: a csapszeg fejének nyírt idoma hengerfelület.

## FESZÜLTÉSÉG

A nyírt idomon a feszültségek megoszlását az elemi szilárdságtanban többnyire egyenletesnek tekintjük, pontosabban feltételezzük, hogy a nyírt idom pontjaiban egyenlő nagy feszültségek ébrednek, állásuk azonos a nyíróerő irányával (illetőleg az elegendő nagy terhelés esetén bekövetkező elmozdulás irányával).

Ha a nyírt idom által két részre osztott test egyik darabjára ható erőnek a nyírt idommal párhuzamos összetevője  $T$ , s a nyírt idom  $dA$  területű darabján a feszültség  $\tau$ , akkor

egyensúlyt feltételezve  $T - \int_{(A)} \tau dA = 0$ , ahol a nyírt idom felszíne. Egyenletes

feszültségmegoszlást feltételezve tehát:

$$\tau = \frac{T}{A}.$$

## MÉRETEZÉS

A nyírásra igénybe vett szerkezeti elem méreteit úgy kell meghatározni, hogy a nyírt Idomon ébredő  $\tau$  feszültségek nagysága ne haladja meg a nyírásra megengedett  $\tau_m$  feszültségét.

Ellenőrzéskor a nyírt idomon ébredő feszültséget hasonlítjuk össze a nyírásra megengedett feszültséggel. Teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{A} \leq \tau_m.$$

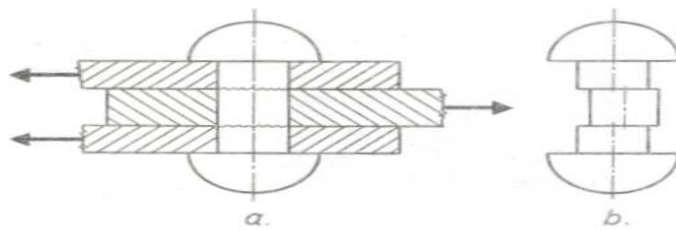
Tervezés esetén a nyírt idom szükséges felszínét vagy a nyírt idom valamely méretét keressük a nyíróerő és a megengedett feszültség ismeretében. A szükséges legkisebb felszín:

$$A_{sz} = \frac{T}{\tau_m}.$$

## SZEGECS ÉS CSAVARKAPCSOLATOK

A 42/a. ábra szilárdsági szegecskötést szemléltet. A különböző irányú erőkkel terhelt lemezdarabok egymáshoz képest bekövetkező elmozdulását egy szegecs, - végein félgömb alakúra kiképzett hengeres test – akadályozza meg. Az ilyen szegecskötések kialakításának és a szegecskötések kialakításának és a szegecskötés méretezési módjának részleteivel nem foglalkozunk, csupán a szegecs (és csavarok) egy jellegzetes igénybevételét beszéljük meg.





A szegecs tönkremenetelének egyik oka az elnyíródás lehet. Elnyíródott szegecset szemléltet a 42/b. ábra. A szegecs szárának darabjai a két nyírt idom (egy-egy szelvény) mentén eltolódnak. Aszerint, hogy hány szelvénye van a szegecs szárának nyírásra igénybe véve, beszélhetünk egyszer, kétszer, n-szer nyírt szegecsről. Ha a szegecs anyagának nyírásra megengedett feszültsége  $\tau_m$ , és a szegecsátmérő  $d$ , akkor n-szer nyírt szegecs által felvehető erő

$$T = \frac{d^2 \pi}{4} n \tau_m.$$

Ha a szegecskötést terhelő erő  $F$ , akkor a szükséges szegecsok száma

$$i = \frac{F}{T} = \frac{4F}{d^2 \pi n \tau_m}.$$

Ez a szegecskötés nyírásra történő méretezésének alapja. A szegecsket azonban nemcsak nyírásra kell méretezni, mert számolni kell egy másik jellemző igénybevétellel, a palástnyomással is. Ez a szegecs szára és a szegecs által összekapcsolt lemezek furata között fellépő erőhatás.

## A TERMÉSZETES FAANYAG NYÍRÓ IGÉNYBEVÉTELE

A természetes fa rostirányú nyírószilárdsága jóval kisebb, mint a másik két anatómiai irányban mérhető nyírószilárdság és lényegesen kisebb, mint a nyomószilárdság:

$\tau_{\parallel} \approx (0,1 - 0,25)\sigma_{\parallel}$ . Néhány tájékoztató adat  $u=15\%$  nedvességtartalom esetén:

Tűlevelűek: 5-10 N/mm<sup>2</sup>

Lágy lombos fák: 4,5- 8 N/mm<sup>2</sup>

Közép kemény lombos fák: 8,5-16 N/mm<sup>2</sup>.

A nyírószilárdság kapcsolatát a különböző befolyásoló tényezőkkel az alábbiakban foglaljuk össze.

$\tau = \tau(u)$ : kapcsolat a nedvességtartalommal.

$$\tau(u) = \tau_{12} \left( \frac{\tau_{12}}{\tau_{én}} \right)^{-\left( \frac{u-12}{u_v-12} \right)}, \text{ a képletben}$$

$u$  – nedvességtartalom,

$\tau_{12}$  - a nyírószilárdság 12 % nedvességtartalomnál,

$\tau_{én}$  - nyírószilárdság élőnedves állapotban,

$u_v$  – az a nedvességtartalom, melynél a nyírószilárdság szárítás következtében bekövetkező változása észrevehető (ez a valamivel kisebb a rosttelítettségi pontnál, kb. 25%).

Megjegyezzük, hogy a fenti képlet számos mechanikai tulajdonságnak a nedvességtartalomtól függő változását leírja, ha  $\tau$  helyébe a megfelelő tulajdonságot jelző változót írjuk be.

$\tau = \tau(\varphi)$ : kapcsolat a nyíróerő iránya és a rostirány által bezárt szög között. A  $\tau(\varphi)$  függvény

közelítőleg: 
$$\tau(\varphi) = \frac{\tau_{\parallel} \tau_{\perp}}{\tau_{\parallel} \sin^n \varphi + \tau_{\perp} \cos^n \varphi}, \quad \text{ahol } n \approx 2,$$

és  $\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}$  a  $\varphi = 0$  és  $\varphi = 90^\circ$ -hoz tartozó nyírószilárdság. A nyírószilárdság és a testsűrűség közötti kapcsolat közelítőleg lineáris.

### 5. Példa

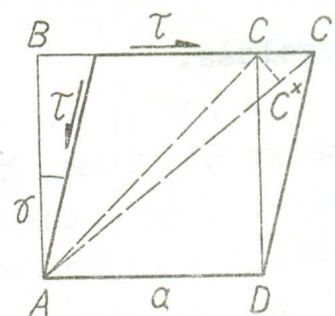
A 43. ábrán látható a él hosszúságú kocka anyagára

$$e=2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \nu = 0,25$$

Határozzuk meg a következő mennyiségeket:

$$\gamma, \varepsilon_{AC}, \text{ ha}$$

$$\tau = 1000 \text{ N/mm}^2.$$



43.ábra

Megoldás.

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 10^5 \frac{1}{1+0,25} = 80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\gamma = \frac{1000}{80000}, \quad \underline{\underline{\gamma = 0,0125 = 0^\circ 42' 58''}}.$$

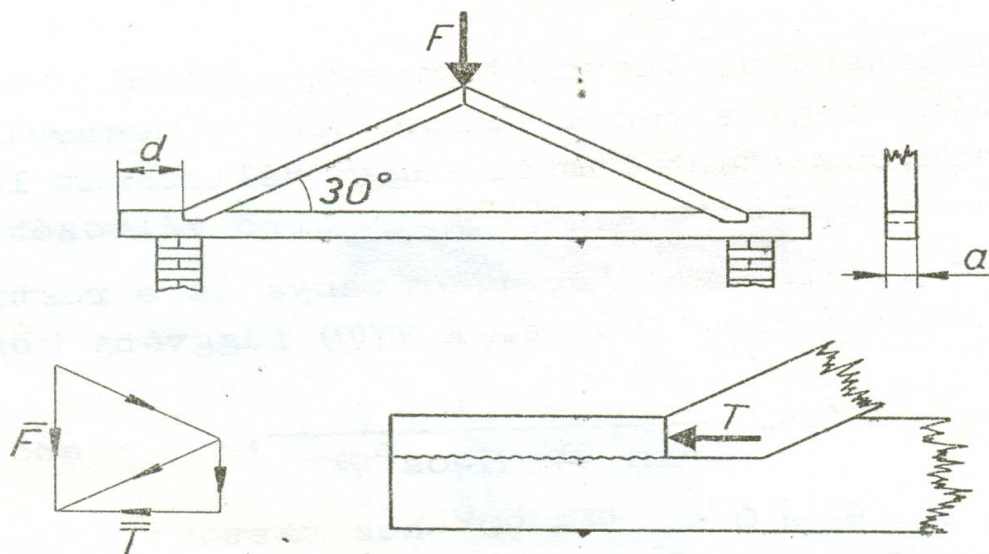
Felhasználva, hogy  $\gamma$  igen kicsiny és  $AC'$ -nek  $AD$ -vel bezárt szöge alig tér el  $45^\circ$ -tól, írhatjuk:

$$\varepsilon = \frac{\overline{C^x C'}}{\overline{AC}} = \frac{a\gamma \cos 45^\circ}{a/\cos 45^\circ} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2}, \quad \underline{\underline{\varepsilon = 0,00625}}.$$

### 6. Példa

Határozzuk meg a 44. ábrán vázolt szelemen gerenda minimálisan szükséges  $d$  méretét, ha a

$$= 10 \text{ cm}, F = 10000 \text{ N}, \tau_m = 2 \text{ N/mm}^2.$$



44. ábra

Megoldás.

A szelemen gerenda végén lévő „vállak” elnyíródásának veszélye áll fenn, ha  $d$  nem elegendően nagy. A nyíróerő a ferde helyzetű gerendákban ébredő erő vízszintes összetevője. A vektorábra alapján belátható, hogy a nyíróerő:  $T = F \cos 30^\circ = 8666 \text{ N}$ .

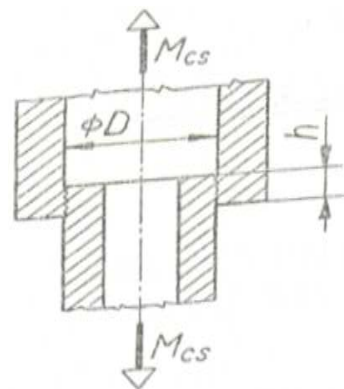
A nyírt idom minimális területe:

$$A_{sz} = ad = \frac{T}{\tau_m}, \quad d = \frac{T}{a\tau_m} = \frac{8666}{100.2}, \quad \underline{\underline{d = 4,33 \text{ cm}}}.$$

### 7. Példa

Adott a 45. ábrán látható üreges tengely  $D$  mérete. A tengely végein ható  $M_{cs}$  csavaró nyomaték és  $\tau_m$ . Határozzuk meg a  $h$  méret azon legkisebb értékét, mely a tengely elnyíródásának megakadályozásához szükséges.

45.ábra



Megoldás.

Túláságosan kis  $h$  méret esetén az elnyíródás egy  $D$  átmérőjű,  $h$  magasságú henger palástja mentén következne be.

A nyírt idomon fellépő feszültségvektorok a henger alkotóira merőlegesek. Az alsó tengelydarab egyensúlyából:

$$M_{cs} = \int \tau_m dA \frac{D}{2} = \tau_m \frac{D}{2} \int dA = \tau_m \frac{D}{2} D\pi h, \quad \underline{\underline{h = \frac{2M_{cs}}{\tau_m D^2 \pi}}}.$$

### 2.3. Síkidomok másodrendű nyomatékai

#### A MÁSDRENDŰ NYOMATÉK FOGALMA

A hajlított tartókban ébredő feszültségek vizsgálatát egy geometriai ismeretanyaggal, a síkidomok másodrendű nyomatékainak tárgyalásával készítjük elő. A síkidomok elsőrendű nyomatékaival korábban (1.16 fejezetben) találkoztunk már.

Valamely síkidomnak egy (a síkidom síkjában fekvő) koordinátarendszer  $x$  tengelyére vonatkozó elsőrendű vagy sztatikai nyomatékához így jutunk (46. ábra):

- a síkidomot felosztjuk  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$  területű részekre,
- a részekben felvesszük az  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ordinátájú pontokat,
- képezzük a  $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta A_i y_i$  összeget, miközben  $n \rightarrow \infty$  és a felosztás

minden határon túl finomodik. Ez azt jelenti, hogy mindegyik rész területe és átmérője zérushoz tart.

Az ilyen módon nyert mennyiséget jelöli

$$S_x = \int_{(A)} y dA.$$

Nyilvánvaló, hogy hasonló módon képezhetjük a

$$\sum_i \Delta A_i y_i^2$$

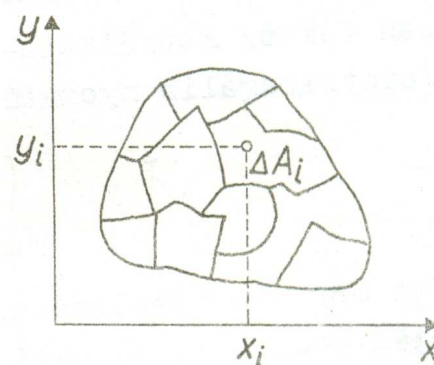
mennyiséget is, a felosztás finomodására hasonló kikötéseket téve, mint az imént. Ez a mennyiség a síkidomnak az  $x$

tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka:

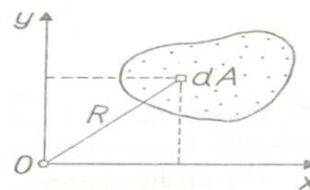
$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA \quad (\text{cm}^4).$$

Ehhez a nem negatív mennyiséghez matematikailag hasonlóan értelmezzük a poláris és a deviációs nyomatékokat is.

Egy síkidomnak a síkjában felvett (47. ábra) 0 pontra vonatkozó poláris másodrendű nyomatéka:



46.ábra



47.ábra

$$I_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \Delta A_i R_i^2 = \int_{(A)} R^2 dA \quad (\text{cm}^4).$$

(A felosztás minden határon túl finomkódó).

Valamely síkidomnak egy (a síkidom síkjában fekvő) koordináta rendszerre vonatkozó deviációs nyomatéka (centrifugális nyomatéka):

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA \quad (\text{cm}^4).$$

Itt már nem részletezzük, hogy mit takar az  $\int_{(A)} xy dA$  szimbólum, ajánlatos azonban végiggondolni.

Megjegyezzük, hogy míg az előző két mennyiség nem negatív, a deviációs nyomaték negatív is lehet.

## NYOMATÉKOKRA VONATKOZÓ TÉTELEK

**Tétel:** ha az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  területű részekből álló síkidom részeinek másodrendű nyomatékai valamely tengelyre  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , akkor az egész síkidom másodrendű nyomatéka ugyanarra a tengelyre:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

A tétel a másodrendű nyomaték definíciójának közvetlen következménye. Hasonló tétel érvényes a poláris és deviációs másodrendű nyomatékokkal kapcsolatban is.

**Tétel:** ha egy síkidomnak valamely (síkjában fekvő)  $x, y$  derékszögű koordináta rendszer (47. ábra) tengelyeire vonatkozó másodrendű nyomatéka  $I_x, I_y$ , az 0 kezdőpontra vonatkozó poláris másodrendű nyomatéka  $I_0$ , akkor

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Bizonyítás:

$$I_0 = \int_{(A)} R^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = \int_{(A)} x^2 dA + \int_{(A)} y^2 dA = I_x I_y$$

**Tétel** (STEINER-tétel): ha egy A területű síkidom súlypontján áthaladó tetszőleges  $\xi$  tengelyre a síkidom másodrendű nyomatéka  $I_\xi$ , a  $\xi$  tengellyel párhuzamos, tőle t távolságra lévő x tengelyre a síkidom másodrendű nyomatéka  $I_x$ , akkor

$$I_x = I_\xi + At^2 .$$

Bizonyítás: a 48. ábra alapján

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_{(A)} (\eta + t)^2 dA = \int_{(A)} \eta^2 dA + \int_{(A)} 2\eta t dA + \int_{(A)} t^2 dA .$$

A jobb oldal első tagja definíció szerint  $I_\xi$ , a harmadik tag  $t^2 A$ . A középső tag zérus volta így

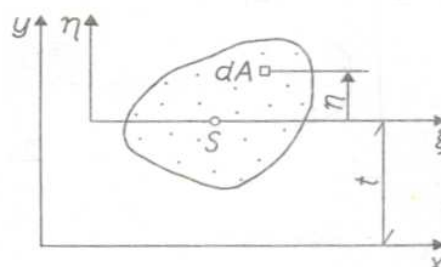
$$\text{látható be: } \int_{(A)} 2\eta t dA = 2t \int_{(A)} \eta dA .$$

Az  $\int_{(A)} \eta dA$  a síkidom sztatikai nyomatéka a  $\xi$  tengelyre. Mint tudjuk, súlyponti tengelyre a sztatikai nyomaték zérus, így a tétel igazolást nyert.

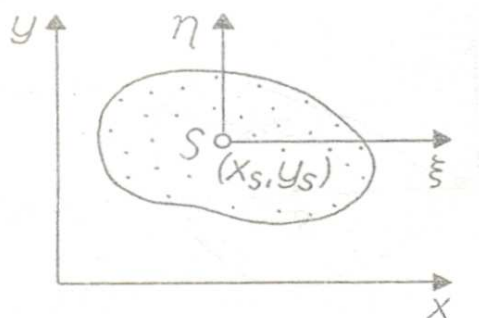
**Tétel:** ha x, y és  $\xi$ ,  $\eta$  derékszögű koordináta-rendszerek megfelelő tengelyei egyirányúak s az utóbbi rendszer kezdőpontja egy A területű síkidom súlypontja (49. ábra), továbbá a súlypont koordinátái (x, y rendszerben)  $x_s$ ,  $y_s$ , akkor

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + Ax_s y_s .$$

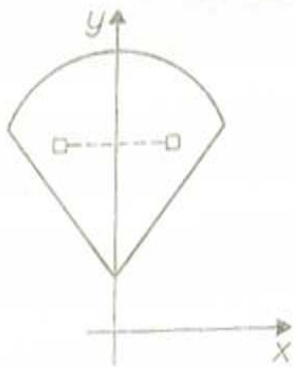
A tétel bizonyítása hasonló az előbbi tételéhez.



48.ábra



49.ábra



50.ábra

**Tétel:** egy a síkidomnak valamely  $x, y$  koordináta-rendszerre vonatkozó deviációs nyomatéka zérus, ha legalább az egyik koordináta-tengely szimmetria-tengely.

Bizonyítás: legyen a síkidom szimmetria-tengelye pl. az  $y$  tengely (50. ábra). Ekkor a síkidom tetszőleges  $x, y$  koordinátájú eleméhez találunk – a szimmetria miatt – egy  $x, y$ , koordinátájú elemet. A összegezés során az ilyen párok deviációs nyomatékösszege zérus, s mivel az egész síkidom csupa ilyen párokból áll:

$$\int_{(A)} xy dA = 0.$$

Megemlítünk néhány további fogalmat és tényt e témakörből, a részletek mellőzésével.

A síkidom másodrendű nyomatékai közül különösen fontosak azok, melyek súlyponti tengelyekre vonatkoznak.

Megmutatható, hogy a tetszőleges alakú síkidom esetében is mindig található legalább két olyan  $x, y$  súlyponti tengely, melyek egymásra merőlegesek és  $I_{xy}=0$ .

Az ilyen tulajdonságú tengelyek a súlyponti főtengelyek, a reájuk vonatkozó másodrendű nyomatékok a főmásodrendű nyomatékok. Jelölésük:  $I_1$  és  $I_2$ .

Megmutatható, hogy ha  $I_1 \neq I_2$ , akkor az egyik ezt jelöljük  $I_1$ -el – a lehetséges súlyponti másodrendű nyomatékok közül a legnagyobb, a másik ( $I_2$ ) a legkisebb. Egy síkidom szimmetria-tengelye egyben súlyponti főtengely is. Olykor előnyös a tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékot a síkidom  $A$  területe és egy távolság négyzetének szorzataként felírni: Pl.:  $I_x = Ai_x^2$ .

Az  $i_x$  távolság neve: inerciasugár. Szemléletes jelentést nem tulajdonítunk neki. A leggyakrabban előforduló síkidomok másodrendű nyomatékai táblázatokban találhatóak.

### 8. Példa

Számítsuk ki egy  $a, b$  méretű téglalap másodrendű nyomatékát a téglalap a oldalát tartalmazó  $x$  tengelyre (51. ábra).

Megoldás:

Ha a téglalapot egyre finomodó négyzetekre osztjuk, akkor azt találjuk, hogy az  $y$  koordinátájú kicsiny négyzetek másodrendű nyomatékának összege  $y^2$  a  $dy$ .



Az egész síkidomé

$$I_x = \int_0^b y^2 a dy = a \left( \frac{y^3}{3} \right)_0^b, \quad \underline{\underline{I_x = \frac{ab^3}{3}}}$$

### 9. Példa

Számítsuk ki egy téglalap deviációs nyomatékát egy a téglalap oldalait tartalmazó x,y koordináta- rendszerre (52. ábra).

Megoldás.

Az  $\int_{(A)} xy dA$  mennyiség kettős integrálként történő

kiszámítását elkerülhetjük a STEINER-tétel segítségével. Az ábrán alkalmazott jelölésekkel:

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + \frac{a}{2} \frac{b}{2} ab.$$

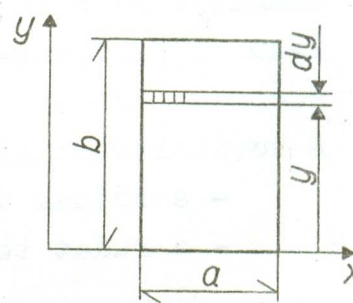
Mivel a szimmetria miatt  $I_{\xi\eta} = 0$ , az eredmény:

$$\underline{\underline{I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{4}}}$$

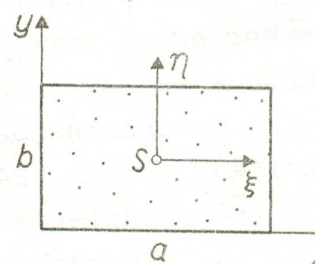
## 2.4. Tiszta hajlítás

### HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTEL

A következő két tárgyponban hajlításra igénybe vett egyenes tengelyű prizmatikus rudakkal foglalkozunk. A rúd valamely szelvényének igénybevétele hajlítás (tiszta hajlítás) ha a (B<sub>j</sub>) erőrendszer eredője erőpár, melynek síkja a rúd tengelyével párhuzamos. Másképpen: a bal oldali erőrendszer olyan erőpárral egyenértékű, melynek nyomatékvektora a vizsgált szelvény síkjával párhuzamos.



51.ábra



52.ábra

A továbbiakban feltesszük, hogy

- a rúdnak van (legalább egy) szimmetriasisíkja,
- a rúdat terhelő egyensúlyi erőrendszer a szimmetriasisíkokban működik.

Az utóbbi feltétel teljesülése esetén egyenes hajlításról beszélünk. Ilyen igénybevétel közelítőleg pl. úgy valósítható meg, hogy egy elhanyagolható súlyú rúd végeire ellentétes nyomatékvektorú erőpárokat működtetünk, mely nyomatékvektorok merőlegesek a rúd szimmetriasisíkjára.

## DEFORMÁCIÓ

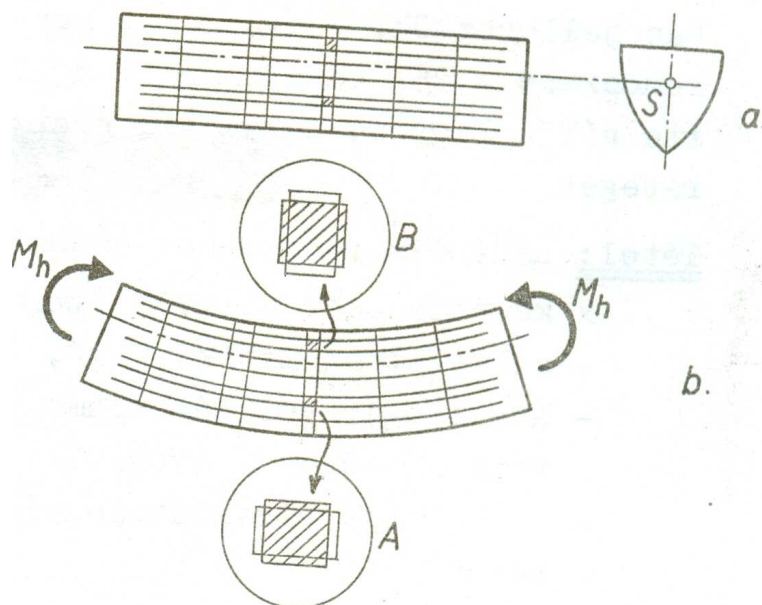
Ha az előbbieken jellemzett rúd, ill. rúdszakasz felületén a rúd tengelyvonalával párhuzamos vonalakat jelölünk ki és ugyancsak kijelöljük néhány keresztmetszet határoló vonalát, akkor egy a tartó felületére rajzolt derékszögű vonalhálózatot kapunk (53/a. ábra).

A terhelés hatására a rúd deformálódik, a rúdra rajzolt hálózat torzul (53/b. ábra):

- a rúdtengellyel párhuzamos vonalak meggörbülnek, de merőlegesek maradnak a keresztirányú vonalakra.

Pontosabb mérések szerint a fenti – BERNOULLI és NAVIER-től származó – feltevések nem teljesen helytállóak, de a reájuk épülő

következtetések a gyakorlat számára kielégítő pontosságú képletekhez vezetnek.



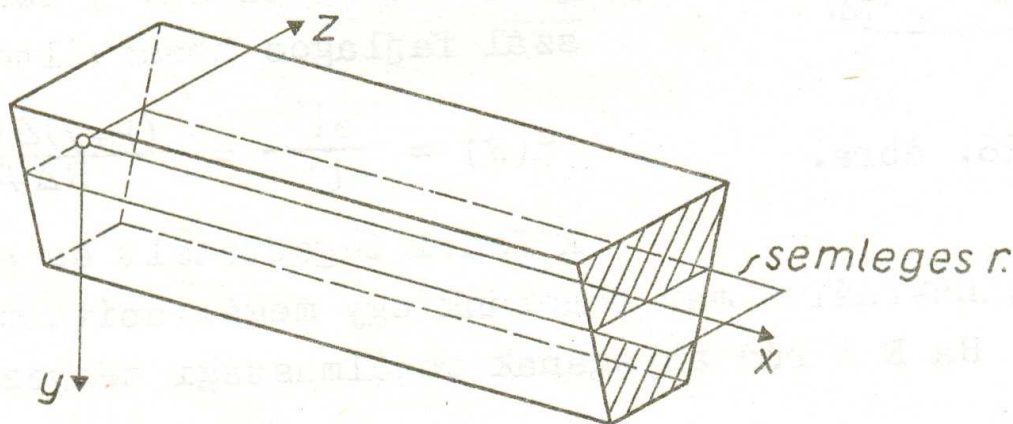
53.ábra

A rúd tengelyével párhuzamos vonalak – „szálak” – egy része meghosszabbodik, más része megrövidül. Kijelölhető a rúdban egy olyan semleges réteg, mely a rúd megnyúló és megrövidülő szálait elválasztja. A semleges réteg szálai hosszukat nem változtatják.

## FESZÜLTSEG

A hajlított rúdszakasz tetszőleges pontjában fellépő feszültségállapotra a kérdéses pont kis környezetében elkülönített elemi kocka deformálódásából következtethetünk. Vizsgáljuk meg az 53. ábrán látható A és B jelű kis kockát. Az a. és b. ábra részletek összevetése alapján megállapítható, hogy a kis kockák deformálódása a lapszögeket nem érinti, csupán a rúd tengelyével párhuzamos élek hosszabbodnak (A), ill. rövidülnek (B) meg. Megállapítható, tehát, hogy a keresztmetszeteken nyírófeszültség nem ébred, csupán normál feszültség. A tiszta hajlításra igénybe vett rúd keresztmetszetein a pontok feszültségállapota húzás, ill. nyomás, a semleges rétegben felvett pontok feszültségmentesek.

A rúd tetszőleges pontján fellépő feszültségeket pontosabban jellemezzük. Vegyünk fel egy  $x$ ,  $y$ ,  $z$  derékszögű koordináta-rendszert a 54. ábra szerint úgy, hogy az  $xy$  sík a rúd szimmetria síkja legyen, az  $xz$  sík pedig tartalmazza a rúd semleges rétegét.



54.ábra

Tétel: ha a tiszta egyenes hajlításra igénybevett rúdszakasz  $x$  koordinátájú szelvényében

- a hajlító nyomaték  $M_h(x)$ ,
- a  $z$  tengellyel párhuzamos súlyponti tengelyre a szelvény másodrendű nyomatéka  $I_z$ ,
- a szelvény vizsgált pontjának második koordinátája  $y$ , akkor

$$\sigma_h(x, y) = \frac{M_h(x)}{I_z} y.$$

A képlet szerint az adott szelvényben  $\sigma_h$  lineárisan változik s a z koordinátától független. A tartó egészét tekintve azonban a feszültség nem csak y-nak, hanem x-nek is függvénye, hiszen  $M_h$  szelvényenként különbözhet. A feszültség a hajlító nyomatékkal egyenesen, a másodrendű nyomatékkal fordítva arányos.

A tétel bizonyítása.

Először lássuk be, hogy a meggörbült semleges réteg görbületi sugara a vizsgált szelvényben R, s az y koordinátájú ponton áthaladó „szál” fajlagos hosszváltozása  $\varepsilon(y)$ , akkor

$$\varepsilon(y) = \frac{y}{R}.$$

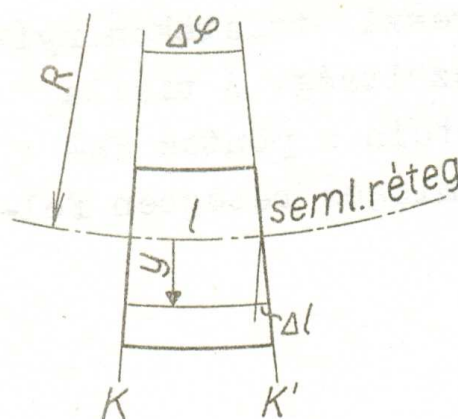
Vegyünk egy olyan szeletet a rúdból, melyet a vizsgált K szelvény és egy vele  $\Delta\varphi$  szöget bezáró K' szelvény határol. Ekkor egy y koordinátájú szál fajlagos hosszváltozása:

$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(R + y)\Delta\varphi - R\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{y}{R}.$$

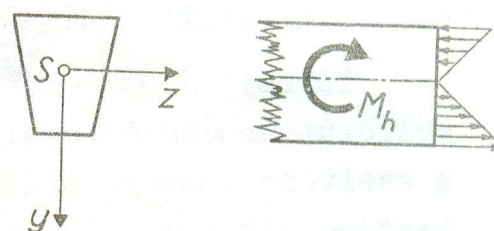
A fenti segédtétel és a HOOKE-törvényt felhasználva már tehetünk egy megállapítást a feszültségekre. Ha E a rúd anyagának rugalmassági tényezője, akkor:

$$\sigma_h(y) = E\varepsilon(y) = E \frac{y}{R}.$$

A feszültség tehát y-nak lineáris függvénye, megoszlását a 56. ábra szemlélteti. Ezután lássuk be, hogy a semleges tengely, vagyis a keresztmetszet zérus feszültségű pontjainak egyenese átmegy a keresztmetszet súlypontján!



55.ábra



56.ábra

A rúdnek a vizsgált szelvényig terjedő darabjára írjuk fel a  $\sum F_{ix} = 0$  egyensúlyi egyenletet!

$$\int_{(A)} \sigma_h(y) dA = \frac{E}{R} \int_{(A)} y dA = 0$$

(A külső erők erőpárral egyenértékűek, ezért az összegezés során kiesnek).  $\int_{(A)} y dA$  a szelvény

sztatikai nyomatéka a semleges tengelyre.

Mint tudjuk, egy síkidomnak csak a súlyponti tengelyeire zérus a sztatikai nyomatéka, ennél fogva a semleges tengely a szelvény súlypontján halad át és a geometriai és mechanikai szimmetria miatt merőleges a tartó szimmetria-síkjára.

Most már megállapíthatjuk, hogy a 54. ábrán feltüntetett koordináta-rendszer  $x$  tengelye valójában a rúd tengelyével esik egybe, azaz a rúd szelvényeinek súlypontja az  $x$  tengelyre esik. A szelvények semleges tengelye párhuzamos az  $x$  tengellyel.

A két segédétel alapján a tétel így látható be: a szelvénytől balra lévő tartódarabra ható erőknek a semleges tengelyre felírt nyomatéka zérus:

$$M_h(x) - \int_{(A)} \sigma(y) dAy = M_h(x) - \frac{E}{R} \int_{(A)} y^2 dA = M_h(x) - \frac{E}{R} I_z = 0.$$

Itt felhasználtuk, hogy  $\int_{(A)} y^2 dA$  a síkidom másodrendű nyomatéka.

A fenti egyenletből:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_h(x)}{E I_z}.$$

Mivel  $\frac{1}{R} = \frac{\sigma_h(y)}{E_y}$ , következik, hogy  $\sigma_h(y) = \frac{M_h(x)}{I_z} y$ .

## KERESZTMETSZETI TÉNYEZŐ

Többnyire a hajlításból eredő  $\sigma_h$  feszültség a legnagyobb abszolút értéke érdekel bennünket. Ez a maximális feszültség a szelvény azon pontjában ébred, mely a semleges tengelytől a legtávolabb van. Ugyanis:

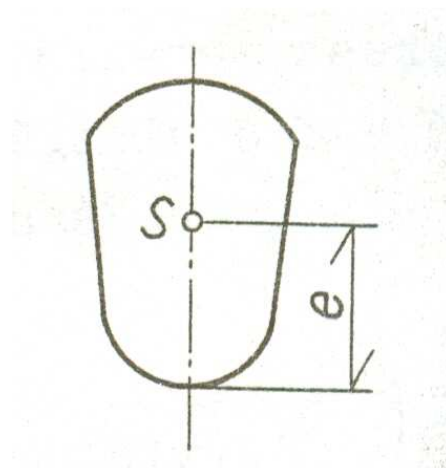
$$|\sigma_h(y)|_{\max} = \frac{|M_h(x)|_{\max}}{I_z} |y|_{\max}$$

Egyszerűbb jelöléssel:

$$\sigma_{h_{\max}} = \frac{M_{\max}}{I_z} e, \text{ ahol } e \text{ azon pontnak a semleges}$$

tengelytől mért távolsága, melyre  $|y|$  a legnagyobb

(57. ábra).



57.ábra

Bevezetve az  $\frac{I_z}{e} = K_z$  jelölést,  $\sigma_{h_{\max}} = \frac{M_{\max}}{K_z}$ . A  $K_z$  a mennyiség és a szelvény keresztmetszeti tényezője. Ez csupán a keresztmetszet geometriai viszonyaitól függ. Növelése a maximális feszültség csökkenését eredményezi. Nyilván való, hogy olyan szelvényeket célszerű alkalmazni, melyek minél kisebb terület – azaz anyagfelhasználás – mellett, minél nagyobb keresztmetszeti tényezőt biztosítanak.

Összehasonlításképpen kiszámítjuk néhány gyakran használt szelvény esetében a keresztmetszeti tényezőt.

Kör:  $I_z = \frac{R^4 \pi}{4}$ ,  $K_z = \frac{R^3 \pi}{4} = \frac{R}{4} R^2 \pi = \frac{1}{8} A d$ , ahol A a kör területe, d az átmérője.

Négyzet:  $I_z = \frac{a a^3}{12}$ ,  $K_z = \frac{I_z}{\frac{a}{2}} = \frac{a a^2}{6} = \frac{a}{6} A$ .

Legyen a négyzet területe azonos a körével, s hasonlítsuk össze a két keresztmetszeti tényezőt!

$$a^2 = R^2 \pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi, \quad a = \frac{d\sqrt{\pi}}{2},$$

A négyzet keresztmetszeti tényezője tehát:  $K_z = \frac{d\sqrt{\pi}}{2.6} A = 0,147Ad.$

A négyzet keresztmetszeti tényezője tehát nagyobb, mint a vele egyenlő területű körlemezé, mely  $\frac{1}{8} Ad = 0,125Ad.$

Szélsőérték számítással megmutatható, hogy egy henger alakú farönkből kivágható, téglalap keresztmetszetű gerendák közül az a legnagyobb teherbírású – azaz legnagyobb keresztmetszeti tényezőjű – melynek keresztmetszete  $1:\sqrt{2}$  oldalarányú.

## MÉRETEZÉS

A tiszta hajlításra igénybe vett rúdkeresztmetszetet úgy kell kialakítani, hogy a szelvényen ébredő legnagyobb hajlítófeszültség  $|\sigma_h|_{\max}$  ne haladja meg a hajlításra megengedett  $\sigma_m$  feszültséget.

Ellenőrzéskor a szelvényben fellépő maximális hajlítófeszültséget hasonlítjuk össze a megengedett feszültséggel. Teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségnek:

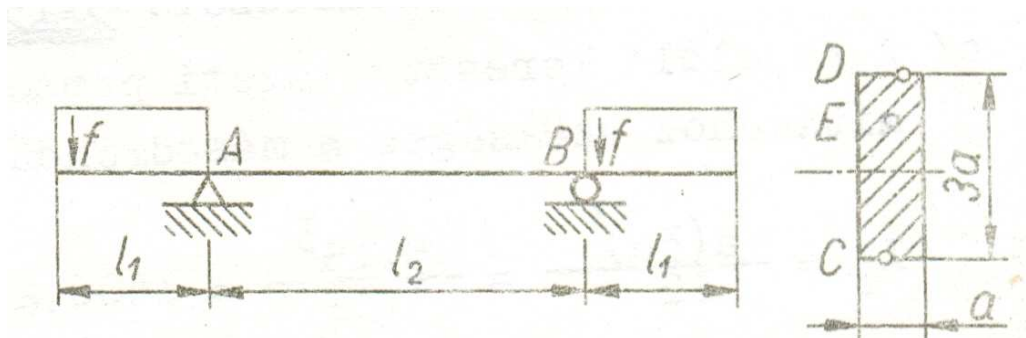
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{K_z} \leq \sigma_m.$$

Tervezés esetén a szelvény szükséges keresztmetszeti tényezőjét vagy a szelvény valamely méretét keressük a hajlító nyomaték és a megengedett feszültség ismeretében. A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{sz} = \frac{M_{\max}}{\sigma_m}.$$

## 10. Példa

A 58. ábrán vázolt tartó téglalap keresztmetszetű fagerenda, melynek anyagára  $E=10\,000\text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_m=20\text{ N/mm}^2$ ,  $f=1\,000\text{ N/m}$ ,  $l_1=2\text{ m}$ ,  $l_2=5\text{ m}$ .



58.ábra

Meghatározandó:

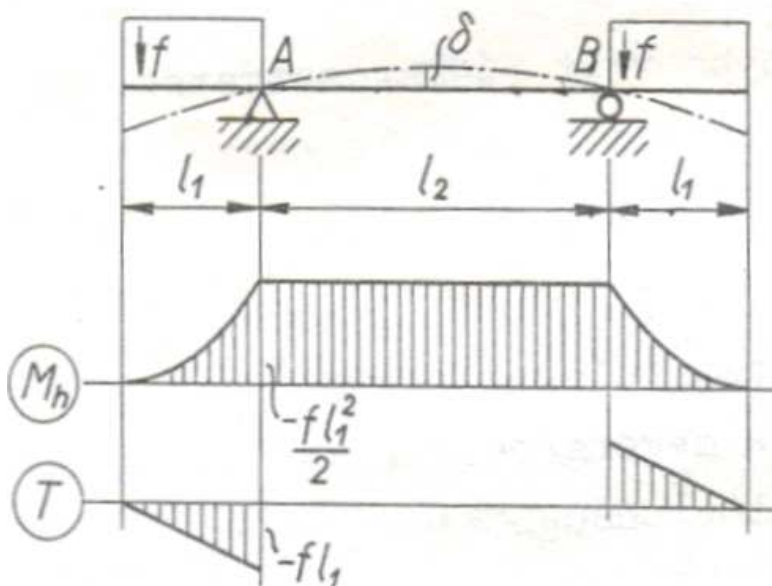
- a tartó azon szakasza, melynek igénybevétele tiszta hajlítás (a tartó önsúlya elhanyagolható),
- a keresztmetszet mindkét mérete,
- a feszültség a veszélyes keresztmetszet C,D, E pontjában (E a keresztmetszet felső részének középpontja),
- a tartó rugalmas vonalának R görbületi sugara,
- az AB tengelyszakasz középpontjának  $\delta$  elmozdulása.

Megoldás.

a/ Az 59. ábra szerint a súlytalannak tekintett tartó AB szakaszának igénybevétele tiszta hajlítás.

$$K_{sz} = \frac{a/3a^2}{6} = \frac{3}{2}a^3.$$

Az AB tartószakasz mindegyik keresztmetszete veszélyes szelvény.



59.ábra



A maximális nyomaték:  $M_{\max} = f \frac{l_1^2}{2} = 1000 \frac{2^2}{2} = 2000 \text{ Nm.}$

$$K_{sz} = \frac{3}{2} a^3 = \frac{M_{\max}}{\sigma_m}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{2 M_{\max}}{3 \sigma_m}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2000000}{3 \cdot 20}}, \quad a=40,5 \text{ mm.}$$

A választott keresztmetszet: 5 x 15 cm.

c/ A kijelölt keresztmetszeti pontokban ébredő feszültség számításához szükséges a másodrendű nyomaték ismerete.

$$I_z = \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{5 \cdot 15^3}{12} = 1406,25 \text{ cm}^4,$$

$$\sigma_h(y) = \frac{M_h(x)}{I_z} y = \frac{-2000000}{14062500} y = -0,1422y,$$

a feszültség a három pontban:

$$C: \underline{\underline{\sigma_h(75) = -10,66 \text{ N/mm}^2}},$$

$$D: \underline{\underline{\sigma_h(-75) = 10,66 \text{ N/mm}^2}},$$

$$E: \underline{\underline{\sigma_h(-37,5) = 5,33 \text{ N/mm}^2}}.$$

d/ Mint tudjuk, a tartó AB közötti darabjának tengelyvonala körívvé deformálódik, mert ezen a szakaszon  $M_h$  állandó. A görbületi sugár:

$$R = \frac{E I_z}{M_h} = \frac{10000 \cdot 1406,2 \cdot 10^4}{2000000}, \quad \underline{\underline{R = 70,3 \text{ m.}}}$$

e/ Felhasználva, hogy a tengely AB szakasza körívvé deformálódik, írhatjuk:

$$\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + (R - \delta)^2 = R^2, \quad \text{amiből} \quad \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = 2R\delta - \delta^2.$$

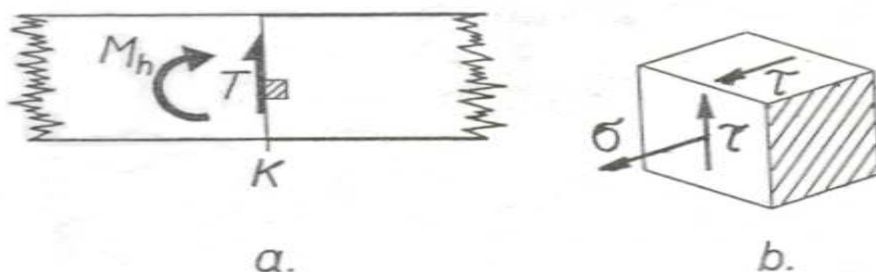
$$\text{Mivel } \delta^2 \text{ elhanyagolható, } \delta \approx \frac{(l_2/2)^2}{2R} = \frac{2,5^2}{140,6}, \quad \underline{\underline{\delta \approx 44,4 \text{ mm.}}}$$

## 2.5. Közönséges (összetett) hajlítás

### A FESZÜLTSEGEK SZÁMÍTÁSA

Tiszta hajlítás gyakorlatilag nem fordul elő, a veszélyes keresztmetszeteket általában egyidejűleg hajlító erőpár és nyíróerő terheli. Ilyenkor közönséges hajlításról (összetett hajlítás, nyírással egyidejű hajlítás) beszélünk.

A keresztmetszetet terhelő nyíró erő hatására nyírófeszültségek lépnek fel a keresztmetszeten, s a dualitás értelmében a keresztmetszeti síkokra merőleges síkokon is.



A 60/a. ábrán látható rúdrészlet K szelvényében az igénybevétel  $M_h$  hajlító nyomaték és  $T$  nyíróerő. A szelvény határán felvett elemi kockán (60/b. ábra) szemléltettük a fellépő feszültségeket. Bár e feszültségek meghatározásáról és megoszlásukról közelebbit egyelőre nem mondhatunk, az könnyen belátható, hogy most nem egytengelyű, hanem síkbeli feszültségállapot uralkodik a keresztmetszet pontjaiban. Ebben az esetben viszont az elemi kocka deformálódása nem olyan, mint a tiszta hajlítás esetében (ahol a feszültségállapot egytengelyű). A lapszögek megváltoznak, az eredetileg sík keresztmetszetek eltorzulnak, s így megszűnik az az alap, melyre a feszültség-számítást korábban alapoztuk.

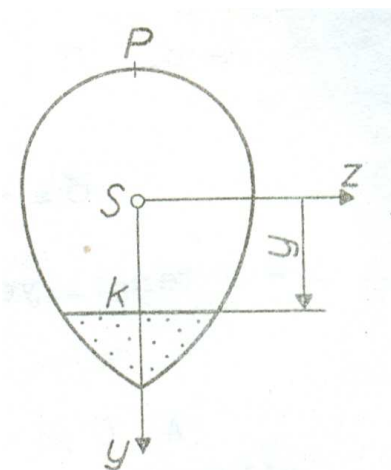
Kísérletekkel igazolható azonban, hogy olyan rudak esetében, melyek hossza a szelvény-magasság ötszörösénél nagyobb, a BERNOULLI-NAVIER-féle feltevések közönséges hajlítás esetében is elfogadhatók, következésképpen a  $\sigma$  feszültségek számítása ugyanúgy történhet, mint tiszta hajlítás esetén, az az:

$$\sigma_h = \frac{M_h(x)}{I_z} y.$$

## A $\tau$ FESZÜLTSEGEK SZÁMÍTÁSA

A rúd keresztmetszetein fellépő  $\tau$  feszültségek számításánál durva hibára vezetne, ha a nyírás tárgyalása során elfogadott egyszerűsítő feltevéseket minden további nélkül alkalmaznánk.

Most is feltesszük ugyan, hogy a nyírófeszültségek iránya egyezik a nyíróerő irányával, de a feszültségek nagyságát nem a  $\tau = \frac{T}{A}$  képlettel számoljuk. A nyírófeszültségek megoszlása ugyanis nem egyenletes. Ha egyenletes volna, akkor a dualitás értelmében a tartó határoló felületének olyan helyén, mint a 61. ábra P pontja, szintén ébredne  $\tau$  feszültség. Ez nyilván nem lehetséges, hiszen a tartó határoló felülete feszültségmentes.



61.ábra

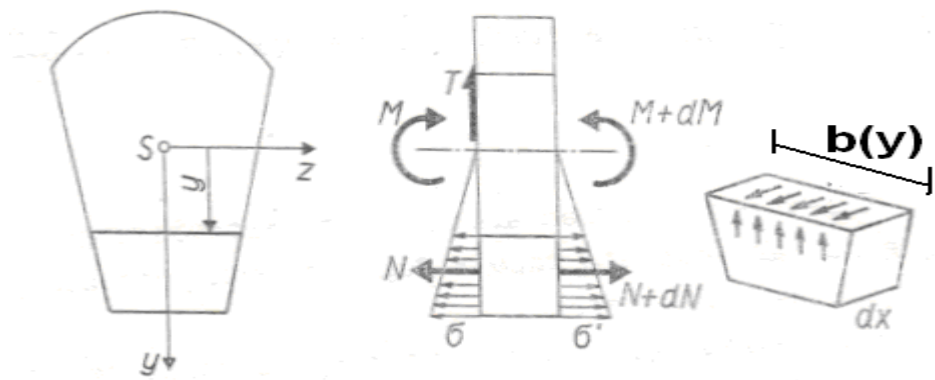
**Tétel:** Ha a szimmetriasíkjában terhelt rúd valamely  $x$  koordinátájú szelvényében a nyíróerő  $T(x)$ , a súlyponti  $z$  koordináta-tengelyre a rúd szelvényének másodrendű nyomatéka  $I_z$ , a szelvény  $y$  koordinátájú pontjai által alkotott szakasz (61. ábra) hossza  $b(y)$ , az említett szakasz „alatti” szelvény-rész sztatikai nyomatéka a  $z$  tengelyre  $S_z(y)$ , akkor a szelvény  $y$  koordinátájú pontjaiban ébredő nyírófeszültség:

$$\tau(x, y) = \frac{T(x) S_z(y)}{I_z b(y)} .$$

A képlet jelöléseinek megértése végett gondoljuk meg, hogy  $T$  általában függvénye  $x$ -nek, a másodrendű nyomaték pedig állandó.  $S_z$  és  $k$  csak  $y$ -tól függhet ( $b$  állandó is lehet).  $S_z$  a keresztmetszet azon részének sztatikai nyomatéka, mely a  $k$  hosszúságú szakasznak a súlyponttal ellentétes oldalán van.

A tétel bizonyítása.

Különítsük el gondolatban a rúd  $x$  és  $x+dx$  koordinátájú szelvényei által határolt darabját (62. ábra). Legyen e két szelvényben a hajlító nyomaték  $M$  és  $M+dM$  (a levezetés során a hajlító nyomatékra utaló  $h$  indexet kivételesen elhagyjuk).



Vizsgáljuk meg a rúd-szelet azon darabjának egyensúlyát, melyet az ábrán mindkét nézetben vastagabb vonallal tüntettünk fel. A testre a rúdtengellyel párhuzamosan ható erők a következők:

- a homloklapokon, a hajlító feszültségekből származó

$$N = \int_{(A)} \sigma dA \quad \text{és} \quad N + dN = \int_{(A)} \sigma' dA \quad \text{erők,}$$

ahol

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y,$$

$$\sigma' = \frac{M(x) + dM}{I_z} y \quad (\text{A homloklapok területe})$$

- a tengellyel párhuzamos határoló lapon fellépő

$$\tau(y) b(y) dx \quad \text{erő.}$$

A  $\tau(y)$  feszültségről feltesszük, hogy a  $dx$  hosszön nem változik, ill. nem függvénye  $z$ -nek.

Az  $x$  irányú komponens-egyenlet:

$$\sum F_{ix} = -\frac{M}{I_z} \int_{(A)} y dA - \tau(y) b(y) dx + \left( \frac{M}{I_z} + \frac{dM}{I_z} \right) \int_{(A)} y dA = 0.$$

Rendezve:  $\tau(y)b(y)dx = \frac{dM}{I_z} \int_{(A)} y dA$ , ahol  $\int_{(A)} y dA$  a homloklap  $S_z$  sztatikai nyomatéka,

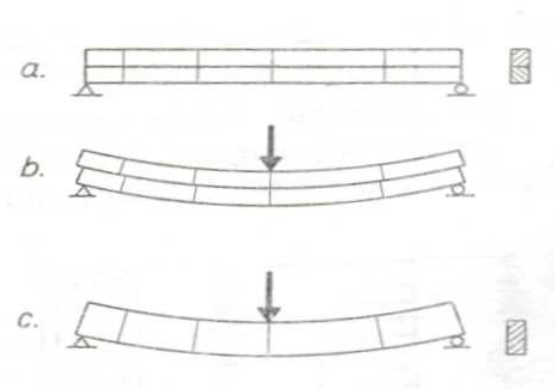
mely függvénye  $y$ -nak.

$$\tau(y) = \frac{dM}{dx} \frac{S_z(y)}{I_z b(y)}, \text{ mivel } \frac{dM}{dx} = T(x), \quad \tau(y) = \frac{T(x)S_z(y)}{I_z b(y)}.$$

### MEGJEGYZÉS

1. A képlet levezetése során alkalmazott feltevések nem teljesen jogosultak, ezért a kapott függvény nem pontosan írja le a feszültség változását.

Téglalap keresztmetszet esetén keskeny és magas szelvényekre jó eredményt ad a képlet, széles és alacsony szelvények esetén helyesbítésre van szükség.



63.ábra

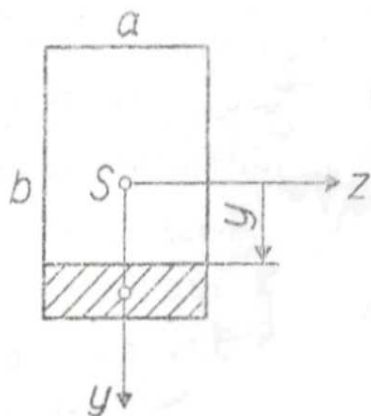
2. Mivel a nyírófeszültség előjelének fizikai jelentést nem tulajdonítunk, a képlet alkalmazásánál csupán a benne szereplő változók absz. értékével számolunk.

3. A hajlításnál fellépő nyírófeszültségek jelenléte érzékelhetővé tehető következőképpen: két egyenlő  $b$  magasságú, téglalap szelvényű gerendát egymásra helyezve (63/a. ábra) és megterhelve azt találjuk, hogy a deformálódó gerendák érintkező lapjai egymáson elcsúsznak (63/b. ábra). Egy azonos hosszúságú  $2b$  magasságú tömör gerenda esetén a rétegek ilyen elcsúszása a fellépő nyírófeszültségek miatt nem következik be (63/c. ábra).

Az utóbbi tartó jóval teherbíróbb az egymásra helyezett két gerendánál.

## A HAJLÍTOTT RÚDBAN ÉBREDŐ FESZÜLTSEGEK ÁTTEKINTÉSE

A hajlított rúdban ébredő  $\tau$  feszültségek számítására levezetett képlet nem ad szemléletes képet a feszültségek megoszlásáról. Hogy a feszültségek alakulását tisztán lássuk – legalább téglalap keresztmetszetű gerendák esetében – írjuk fel a  $\tau = \tau(y)$  függvényt adott  $a, b$  méretű téglalap-szelvény és  $T$  nyírőerőt feltételezve (64. ábra).



64.ábra

A képletben szereplő geometriai jellemzők:

- a teljes szelvény másodrendű nyomatéka:  $I_z = \frac{ab^3}{12}$ ,
- $S_z(y)$ , vagyis az ábra vonalkázott részének sztatikai nyomatéka:

$$S_z(y) = y_s A = \frac{\frac{b}{2} + y}{2} a \left( \frac{b}{2} - y \right) = \frac{a}{2} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right),$$

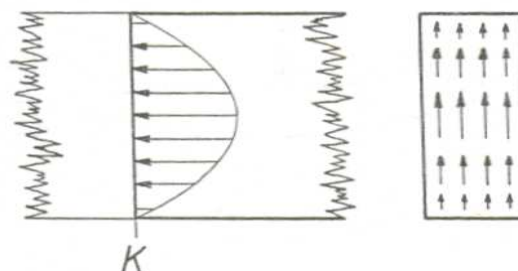
- $b(y) = a$ .

A  $\tau(y)$  függvény tehát:

$$\tau(y) = \frac{T \frac{a}{2} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{a b^3}{12} a},$$

$$\tau(y) = \frac{6T}{a b^3} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

A feszültségek tehát parabolikus megoszlásúak ebben az esetben. A feszültség-megoszlást a 65. ábrán kétféleképp is szemléltettük. Az ábra jobb oldali nézete a  $K$  szelvényen fellépő  $\tau$  feszültségeket ábrázolja. A megoszlást azonban



65.ábra

jobban szemlélteti, ha a tengellyel párhuzamos rétegekben a dualitás mellett ébredő feszültségeket tüntetjük fel (bal oldali nézet).

A legnagyobb nyírófeszültség a szelvény közepén ébred, értéke:

$$\tau_{\max} = \tau(0) = \frac{6T}{ab^3} \frac{b^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}.$$

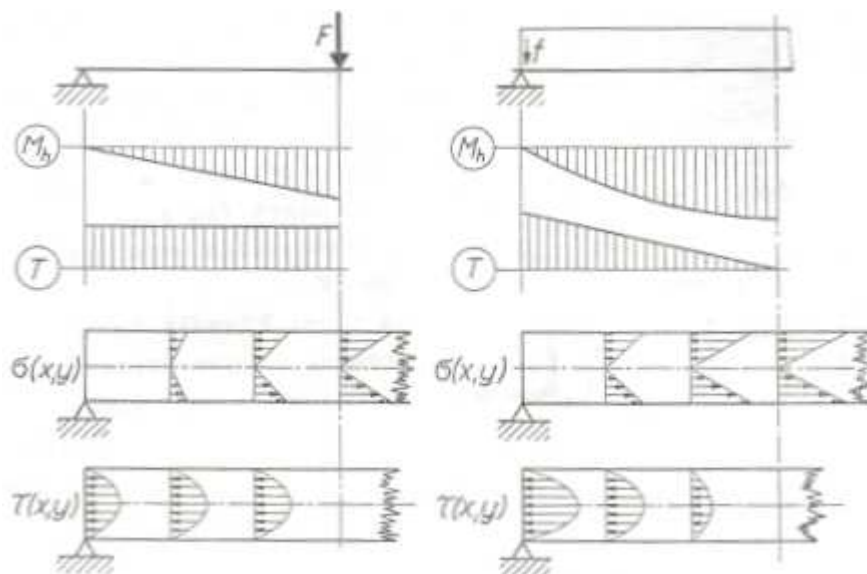
A maximális feszültség tehát a  $\frac{T}{A}$  átlagérték másfélszerese. Alacsony, széles téglalap-szelvények esetén a maximális feszültség a 64. ábra jelöléseit használva így módosítható:

$$\tau_{\max} = \beta \frac{3}{2} \frac{T}{A}, \quad \text{ahol}$$

a/b	0,5	1	2	4
$\beta$	1,033	1,126	1,396	1,988

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy más szelvény-alakok esetében más feszültség-megoszlás érvényes.

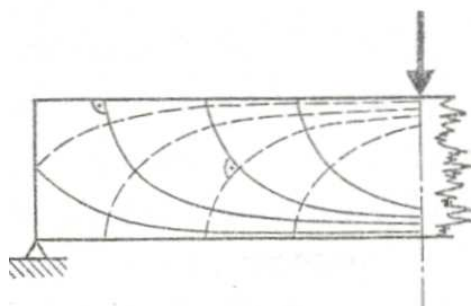
Hogy a legegyszerűbb terhelési esetekben milyen feszültségek lépnek fel egy kéttámaszú, téglalap szelvényű gerendában, azt a 66. ábra szemlélteti. A szimmetria miatt csupán fél tartódarabon ábrázoltuk a viszonyokat.



66.ábra

Az ábra mindkét esetben feltünteti az igénybevételeket, valamint a  $\sigma_h(x,y)$  és a  $\tau(x,y)$  függvények grafikonjait, ez utóbbiakat magán a tartón (néhány szelvényre vonatkozólag).

A  $\sigma$  és  $\tau$  feszültségek arányát az ábrák nem tükrözik.



67.ábra

A közönséges hajlításra igénybe vett rúdban fellépő feszültségek megoszlásáról további felvilágosítást nyújtanak a feszültségi trajektóriák.

Ez egy olyan görbesereg, melynek görbéi a főfeszültségek állását jelölik ki: a tartó tetszőleges pontjában a főfeszültség-vektor a kérdéses ponton áthaladó trajektória érintőjébe esik (67. ábra).

Az ábra egy kéttámaszú tartó főfeszültségű trajektóriáit szemlélteti. A folytonos vonalak a húzó feszültségi, a szaggatott vonalak a nyomó feszültségi trajektóriák. Hasonlóan értelmezhetők a fő nyírófeszültségi trajektóriák is.

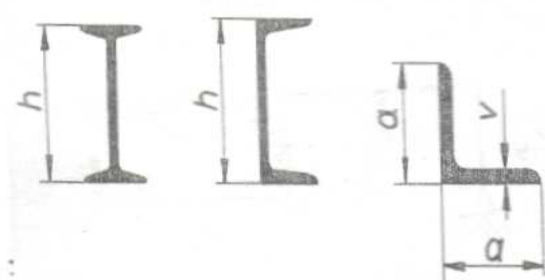


## HAJLÍTOTT TARTÓK KIALAKÍTÁSA

A hajlított tartó megtervezése a tartó anyagának, szelvényalakjának megválasztását és a keresztmetszeti méretek meghatározását jelenti.

A hajlított tartók *anyaga*: rendszerint acél, fa, acélbeton.

Igen gazdaságos a kereskedelemben kapható, szabványosított idomacélok alkalmazása. Ezek

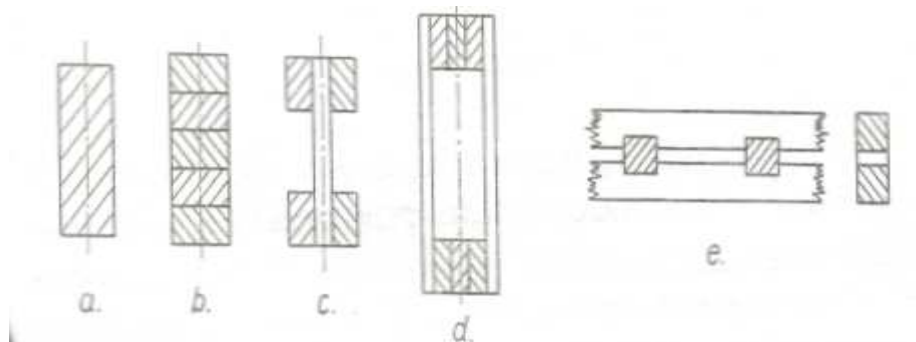


68.ábra

minden adata táblázatokban található. A leggyakrabban alkalmazott profilokat a 68. ábra szemlélteti. Megnevezésük a jellemző méret (h, ill. a, v) és a szabványszám megadásával történik.

A fából készült tartók szegezéssel, csavarozással és ragasztással készülnek.

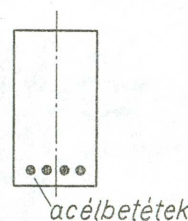
Néhány gyakran előforduló tartó-keresztmetszetet mutat be a 69. ábra.



Magyarázat a 69. ábrához:

- egyszerű gerendatartó,
- ragasztott lamellás tartó
- ragasztott magas gerincű fatartó
- ragasztott szekrénytartó
- összetett szelvényű ékelt gerendatartó.

Az acélbetonból készült tartók az acél nagy húzószilárdságát s a beton nagy nyomószilárdságát használják ki. A két anyag egyesítését közel azonos hőtágulási együtthatójuk teszi lehetővé. a hajlításra igénybe vett acélbeton tartóban a húzó feszültségeket az acél veszi fel (70. ábra).



**70.ábra**

A hajlított tartók *szelvényalakjának megválasztásáról* általában azt mondhatjuk: olyan szelvényt kell választani, mely

- lehetőleg szimmetrikus,
- alakja igazodik a feszültségek megoszlásához.

Az utóbbi követelménynek olyan szelvények felelnek meg, melyeknek területükhöz képest nagy a keresztmetszeti tényezőjük. Másképpen: a szelvény legnagyobb része a semleges tengelytől távol helyezkedik el. Az ilyen szelvények a  $\sigma$  feszültségek eloszlása szempontjából kedvezőek. Tekintettel kell lenni azonban a  $\tau$  feszültségek eloszlására is, melyek többnyire a semleges rétegben maximálisak. Az I-alakú idomacél profilja mindkét követelménynek eleget tesz. Az összetett szelvények (pl. 69/c, d ábra) is többé-kevésbé e követelményeknek tesznek eleget.

A szelvényméretek meghatározásához ismerni kell a tönkremenetel szempontjából legveszélyesebb szelvényt, sőt a szelvény azon pontját, amelyhez a legnagyobb feszültség tartozik. Láttuk, hogy a közönséges hajlításra igénybe vett szelvény szélső szálaiban a  $\sigma$  feszültségek maximálisak, a  $\tau$  feszültségek értéke pedig zérus, valamint, hogy a semleges rétegben a helyzet éppen fordított.

Ha még figyelembe vesszük, hogy a maximális  $\sigma$  feszültségek rendszeren jóval nagyobbak, mint a legnagyobb nyírófeszültségek, akkor elfogadható az az álláspont, hogy a szelvényméretek meghatározásánál a maximális  $\sigma$  feszültségekből indulunk ki.

Ellenőrzés: a szelvényben fellépő maximális  $\sigma$  és  $\tau$  feszültséget hasonlítjuk össze a megengedett feszültséggel. Teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{K_z} \leq \sigma_m, \quad \tau_{\max} = \frac{T_{\max} S_z}{b I_z} \leq \tau_m.$$

$S_z$  = a semleges tengelyre vonatkozó sztatikai nyomaték  $y=0$ -nál., amennyiben a semleges rétegben ébred a legnagyobb nyírófeszültség.

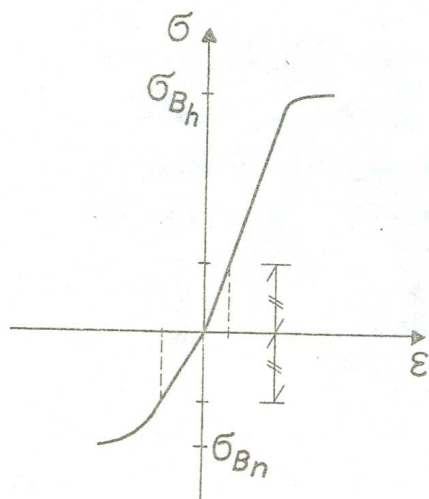
$b$  = a szelvény szélessége  $y=0$ -nál.

Tervezés: a szelvény szükséges keresztmetszeti tényezőjét, vagy a szelvény valamely méretét keressük a hajlító nyomaték és a megengedett feszültség ismeretében. A szükséges keresztmetszeti tényező:

$$K_{sz} = \frac{M_{\max}}{\sigma_m}.$$

Az így megválasztott keresztmetszetet még ellenőrizni kell nyírás szempontjából.

## A TERMÉSZETES FAANYAG HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTELE



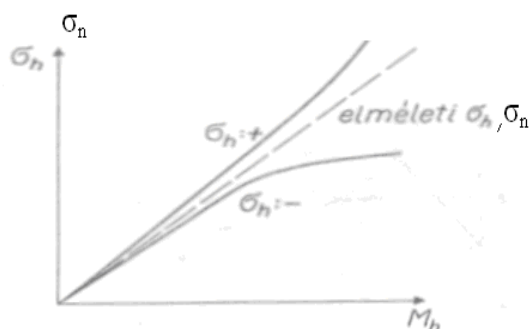
71.ábra

A hajlítás tárgyalása során feltettük, hogy a hajlításra igénybevett rúd anyaga követi a HOOKE-törvényt, s a fajlagos hosszváltozás nem függ attól, hogy húzó- vagy nyomófeszültség idézi-e elő. A 71. ábráról azonban leolvasható, hogy a természetes faanyag nyomófeszültségek hatására erősebben deformálódik, mint húzófeszültségek hatására és nyomószilárdsága ( $\sigma_{B_n}$ ) kisebb, mint

$$\text{húzószilárdsága } (\sigma_{B_h}): \quad \frac{\sigma_{B_h}}{\sigma_{B_n}} \approx 2.$$

E tények következménye, hogy a  $\sigma_h(x) = \frac{M_h(x)}{I_z} y$  képlet a természetes faanyagból

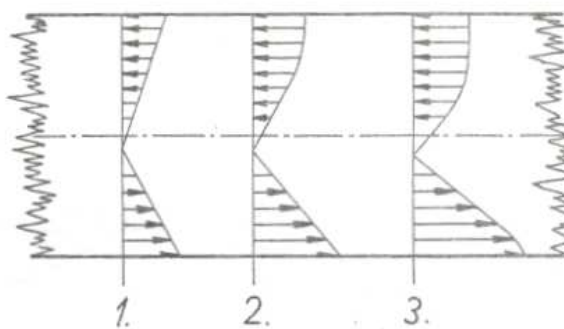
készült rudakban ébredő hajlítófeszültségeket pontatlanul írja le: a valóságos húzófeszültség a számítottnál nagyobb, a nyomófeszültség kisebb. A 72. ábra a képlettel számított, s a valóságos feszültségek alakulását szemlélteti. Ugyanezen tény mutatja be más módon a 73. ábra: egy téglalap szelvényű gerenda valamely szelvényében  $M_1 < M_2 < M_3$  hajlító nyomaték hatására három különböző feszültség-



72.ábra

megoszlás keletkezik. Az anyag tönkremenetele a nyomott oldalon kezdődik. Ha a nyomott oldalon  $\sigma_h = \sigma_{B_n}$  bekövetkezik, a továbbiakban lényeges feszültségnövekedés már nem jelentkezik, a feszültség csak a húzott oldalon növekedhet.

Megfigyelhető az ábrán a semleges szál eltolódása a húzott oldal felé. A szakadás, törés a húzott oldalon lép fel először.



73.ábra

Ha egy téglalap szelvényű, kéttámaszú fagerendát koncentrált erővel terhelünk (a gerenda közepén) s az erő nagyságát változtatjuk, azt találjuk, hogy a tönkremenetel módja (törés, nyíródás) az anyag szilárdságán ( $\sigma_B$ ,  $\tau_B$ ) kívül a  $\lambda = \frac{l}{b}$  arányának is függvénye, ahol  $l$  a támaszköz,  $b$

a szelvény magassága. E tény belátása végett határozzuk meg, hogy a tartó anyagának  $\sigma_B$  hajlító szilárdságához és a változó  $\lambda$ -hoz milyen maximális  $F$  terhelés tartozik!

$$\sigma_h = \sigma_B = \frac{M_{\max}}{K}, \quad M_{\max} = \frac{F l}{2}, \quad K = \frac{ab^2}{6}, \quad \sigma_B = \frac{3Fl}{2ab^2} = \frac{3F}{2A} \lambda,$$

(A: szelvény terület).

Az  $F = F(\lambda)$  függvény:  $F = \frac{2A}{3\lambda} \sigma_B$ .

Ezen erő hatására a középső szelvényben ébredő maximális feszültség  $\sigma_h = \sigma_B$ , a tartó ezen a helyen megy tönkre, feltéve, hogy  $\lambda$  nem túlságosan kicsiny.

Határozzuk most meg a terhelő erőt úgy, hogy a (tartó semleges rétegében) maximális nyírófeszültség éppen  $\tau_B$  legyen!

$$\tau_{\max} = \tau_B = \frac{3}{2} \frac{T}{A}, \quad T = \frac{F}{2}, \quad \tau_B = \frac{3F}{4A}, \quad F = \frac{4}{3} A \tau_B.$$

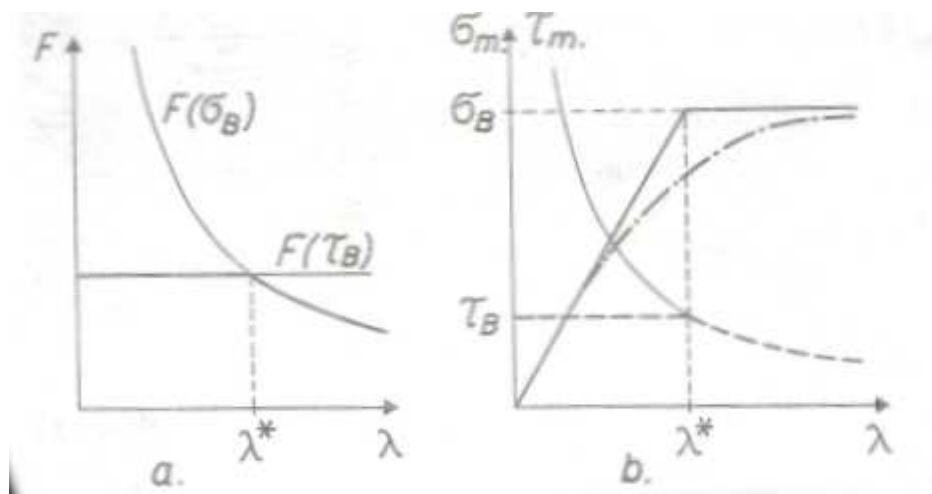
A maximális terhelő erőre nyert két függvényt ábrázolva (74/a. ábra) azt látjuk, hogy

$\lambda^* = \frac{\sigma_B}{2\tau_B}$  alatt a maximális terhelő erő:  $F = \frac{4A}{3} \tau_B$ , s a tönkremenetel elnyíródás miatt

fenyeget.  $\lambda^*$  felett a maximális terhelő erő  $F = \frac{2A}{3\lambda} \sigma_B$ , a veszélyes szelvény a gerenda

középső szelvénye, a tönkremenetel szempontjából a  $\sigma$  feszültségek veszélyesek.

A 74/b. ábra a maximális terhelő erők esetén fellépő  $\sigma_{\max}$  és  $\tau_{\max}$  értékeket szemlélteti.



74.ábra

Megjegyezzük, hogy a  $\sigma_{\max} = \sigma_{\max}(\lambda)$  függvény tapasztalati úton nyert grafikonja közelítőleg a 74/b. ábra pont-vonallal rajzolt görbéje.

## 11. Példa

Számítsuk ki a 10. példában szereplő tartóban ébredő max. nyíró-feszültséget.

A maximális nyíróerő a támaszoknál lép fel, a maximális nyírófeszültség pedig a szelvény semleges tengelyének pontjaiban. A feszültség számításához szükséges adatok:

$$T = fl_1 = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ N},$$

$$S(y) = a \cdot 1,5a \frac{1,5a}{2} = \frac{1,5^2}{2} 50^3 = 140625 \text{ mm}^3,$$

$$I_z = \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{27 \cdot 50^4}{12} = 14062500 \text{ mm}^4, \quad b(y) = 50 \text{ mm},$$

$$\tau_{\max} = \frac{2000 \cdot 140625}{14062500 \cdot 50} \quad \underline{\underline{\tau_{\max} = 0,4 \text{ N mm}^2}}.$$

## 2.6. Hajlított tartók deformációja

### A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETE

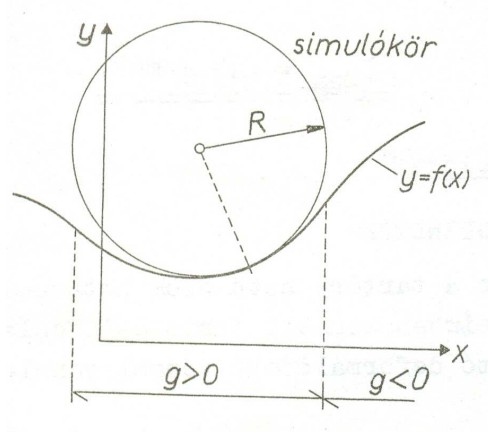
A rúd alakú tartó tengelye a tartóra ható erők hatására deformálódik. Mivel általában síkban terhelt tartókkal foglalkozunk, mondhatjuk, hogy a tartó deformálódott tengelyvonala – a rugalmas vonal – síkgörbe.

Célunk most az, hogy a tartó anyagának, méreteinek és a terhelésének az ismeretében módot találjunk a rugalmas vonal egyenletének felírására.

Bizonyos kapcsolatot a terhelés és a rugalmas vonal geometriája között már ismerünk: a 2.4. pontban láttuk, hogy a rugalmas vonal valamely pontjában a görbület és a kérdéses pontban érvényes hajlító nyomaték között a kapcsolat

$$|g| = \left| \frac{1}{R} \right| = \left| \frac{M_h(x)}{EI_z} \right|.$$

Ezt a tudásunkat kapcsoljuk össze, a matematikából síkgörbék görbületi viszonyaira vonatkozólag tanult alábbi tényekkel:



75.ábra

- a differenciálható  $y = f(x)$  egyenletű síkgörbe görbülete:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

- a görbület előjelét akkor vesszük pozitívnek, ha az  $y$  tengellyel szembenézve a kérdéses pontban a görbe konkáv (75. ábra).

A koordináta rendszert a szokásos módon felvéve (47. ábra) azt mondjuk, hogy  $y'$  geometriai jelentése: a rugalmas vonal érintőjének iránytangense. Mivel rúd alakú tartók tengelyvonala a terhelés hatására csak igen kevésbé deformálódhat,  $y'$  s ennek négyzete elhanyagolható. A görbület számítására szolgáló differenciálegyenlet tehát jó közelítéssel így írható:

$$\frac{1}{R} = y''.$$

A görbület mechanikai adatokkal kifejezve a rugalmas vonal differenciálegyenletét kapjuk:

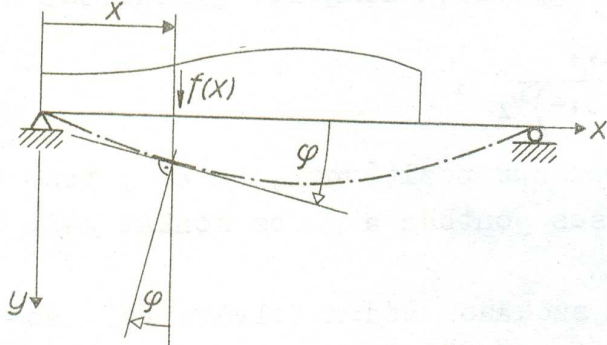
$$y'' = -\frac{M_h(x)}{EI_z}$$

A képlet jobb oldalán szereplő negatív előjel magyarázata: koordináta-rendszerünk megválasztása és a hajlító nyomaték értelmezése folytán, pozitív hajlító nyomaték esetén negatív görbületű rugalmas vonal alakulna ki (47. ábra), a képlet tehát előjelhibával adná a görbületet. Hogy ezt a hibát elkerüljük  $M_h$ -t negatív előjellel vesszük.

#### A RUGALMAS VONAL DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK ALKALMAZÁSA

Eredeti célunkat – vagyis a rugalmas vonalat leíró függvény meghatározását – az

$y'' = \frac{-M_h(x)}{EI_z}$  differenciálegyenlet egymást követő két integrálásával érhetjük el.



**76.ábra**

Az első integrálás után megkapjuk az  $y' = y'(x)$  függvényt, mely a rugalmas vonal  $x$  koordinátájú pontjához húzott érintő  $\varphi$  irányszögének tangensét, ill. jó közelítéssel az irányszögét adja meg. Ez egyben az  $x$

koordinátájú szelvény elfordulási szöge is (76. ábra).

A második integrálás már magát a rugalmas vonal egyenletét szolgáltatja.

Figyelembe kell venni, hogy a rúd különböző szakaszaira esetleg külön differenciálegyenletek érvényesek, valamint azt, hogy az integrálás eredményeképpen nyert függvényre bizonyos feltételeknek kell teljesülniük. Ez utóbbi kijelentés egy



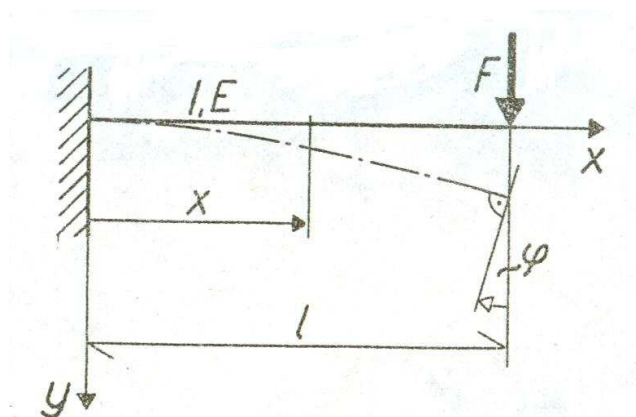
példán érthető meg. Írjuk fel a 77. ábrán látható konzoltartó rugalmas vonalának differenciál egyenletét, a rugalmas vonal egyenletét, a jobb oldali végpont elmozdulását és a végkeresztmetszet elfordulását! A tartó lényeges adatai:  $l$ ,  $E$ ,  $I$ . A terhelés  $F$  koncentrált erő. A rugalmas vonal differenciálegyenletéhez szükség van a hajlító nyomaték függvényre:  $M_h(x) = -F(l-x)$ . Ez a teljes tartóhosszon érvényes. A differenciálegyenlet tehát:

$$y''' = \frac{F(1-x)}{E I} \quad 0 < x < l.$$

Az első integrálás eredménye:

$$y' = \frac{F}{E I} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1.$$

A  $C_1$  állandót abból a feltételből nyerjük, hogy  $x=0$ -nál  $y'=0$ , mert a rugalmas vonal érintője vízszintes.



77.ábra

A feltételből következik, hogy  $C_1=0$ , tehát

$$\underline{\underline{y' = \varphi(x) = \frac{F}{E I} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)}}.$$

A második integrálás eredménye:  $y = \frac{F}{E I} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$ .

A  $C_2$  állandót abból a feltételből nyerjük, hogy  $x=0$ -nál  $y=0$ , mert a tengely  $x=0$  koordinátájú pontja nem mozdul el. E feltételből következik, hogy  $C_2=0$ . A rugalmas vonal egyenlete tehát:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3l - x).}}$$

A jobb oldali tartóvégpont elmozdulása  $y(l) = \frac{Fl^2}{6EI}(3l - l)$ ,  $y(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$ .

Itt jegyezzük meg, hogy a rugalmas vonal pontjainak  $x$  irányú elmozdulásait elhanyagoljuk. A jobb oldali tartóvég szelvényének elfordulása:

$$\varphi(l) = \frac{F}{EI} \left( l^2 - \frac{l^2}{2} \right), \quad \underline{\underline{\varphi(l) = \frac{Fl^2}{2EI}}}$$

A gyakorlatilag legfontosabb esetekre a rugalmas vonal egyenlete, a jellemző deformációs adatok – lehajlások, elfordulási szögek – táblázatokban rendelkezésre állnak.

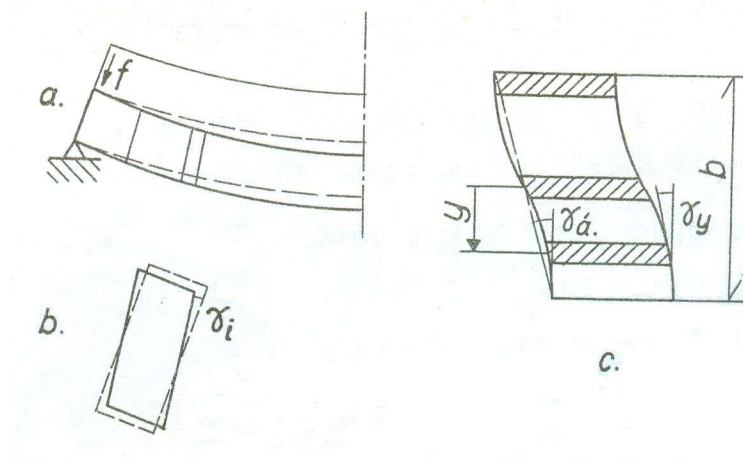
A rugalmas vonal differenciál egyenletének linearitásából következik, hogy érvényes a szuperpozíció törvénye, azaz egy többféle terhelésből álló erőrendszer hatására kialakuló rugalmas vonal egyenlete az egyes terhelések alapján számítható függvények összegzésével számítható. Hasonló állítás érvényes a szögelfordulások számítására is.

### A NYÍRÓERŐ HATÁSA A DEFORMÁCIÓRA.

A fentiekből úgy tűnhet, hogy a rugalmas vonal alakját a tartó rugalmassági tényezőjén és a keresztmetszet másodrendű nyomatékán kívül csak a hajlító nyomaték szabja meg. Valójában a nyíróerőnek is van hatása a deformálódásra. Állításunk részletes igazolása az ajánlott szakirodalomban található, e helyen csak érzékeltetni kívánjuk a nyíróerő deformáló hatását.

A 78/a. ábra egyenletesen megoszló terhelés következtében deformálódott fagerendát szemléltet – erősen torzítva. Csupán a keresztmetszetekben ébredő  $\sigma$  feszültségek hatására – mint láttuk – a szelvények síkok maradnának, s a gerenda deformálódott alakját a szaggatott vonallal rajzolt ábrarészlet mutatná.

A nyírőfeszültségek hatására azonban a szomszédos szelvények elcsúsznak egymáshoz képest,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$  szöggel (78/b. ábra). E nyírás okozta deformálódás hatására a tartó a folytonos vonallal rajzolt alakot ölti.



78.ábra

A fenti, a jelenséget éppen csak érzékeltető magyarázat finomítása végett megemlítjük, hogy egy-egy szelvényben  $\gamma$  az  $y$  koordináta függvénye:  $\gamma(y) = \frac{\tau(y)}{G}$ . A  $\tau(y)$  függvényt téglalap szelvényre korábban (2.5) kiszámítottuk, melyet most  $\tau(y)$  képletbe téve:

$$\gamma(y) = \frac{6T(x)}{Gab^3} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

Egy szelvényben integrálva az elemi  $\gamma$  szögeket (78/c. ábra) és osztva a tartó magasságával, a  $\gamma_a = \frac{T(x)}{Gab}$  átlagértéket kapjuk. A képletből látható, hogy a deformálódás a nyíróerővel arányos. A nyírás okozta deformálódás általában nem jelentős, a kivételek közé tartoznak azonban a fából készült tartók. Ezeknél a nyírás okozta deformálódás már jelentékeny lehet.

## FAGERENDÁK LEHAJLÁSÁNAK SZÁMÍTÁSA

Fából készült kéttámaszú tartók esetén a lehajlás maximális értéke a következő képlettel számítható:

$$y = \frac{F l^3}{E I} k_1 + \frac{Fl}{GA'} k_2.$$

A képletben  $F$ ,  $l$ ,  $E$ ,  $I$  jelentése nyilvánvaló,

$k_1$ : a terhelésmódtól és a tartó típusától függő tényező,

$k_2$ : az elmozduló pont helyzetétől függő tényező,

$A'$ : téglalap keresztmetszet esetén  $\frac{5}{6}ab$ ,

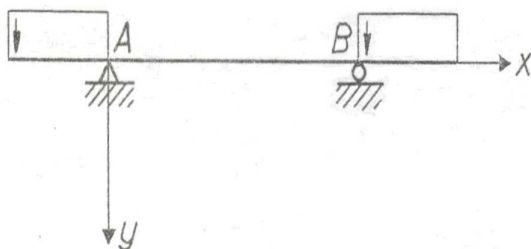
Kör keresztmetszet esetén  $\frac{9}{40}\pi d^2$ .

A  $k_1$ ,  $k_2$  tényezők az alábbi táblázatból vehetők:

Terhelés	A tartó megfogása	$k_1$	$k_2$
Egyenletesen megoszló	támasztás	5/384	1/8
Középen koncentrált	támasztás	1/48	1/4
<i>Szabad végén koncentrált</i>	<i>egy végén befogott</i>	1/3	1

### 12. Példa

Ellenőrizzük a 10. példában szereplő tartó deformációjára vonatkozó számításunkat!



79.ábra

Írjuk fel az AB szakaszon (79. ábra) a rugalmas vonal differenciál egyenletét a 10. példa adatait felhasználva:

$$y'' = -\frac{M_h(x)}{EI_z} = \frac{2000000}{10000 \cdot 1406,25 \cdot 10^4} = \frac{2}{140625}.$$

Integrálás:  $y' = \frac{2}{140625}x + C_1.$

$x = 2,5$  m-nél  $y' = 0$ , tehát  $0 = \frac{2}{140625} \cdot 2500 + C_1$ ,  $C_1 = -0,03555$ .

Újabb integrálás:

$$y = \frac{2}{140625} \frac{x^2}{2} - 0,03555x + C_2.$$

$x=0$ -nál  $y=0$ , következıleg  $C_2=0$ .

A rugalmas vonal egyenlete:  $y = \frac{x^2}{140625} - 0,03555x.$

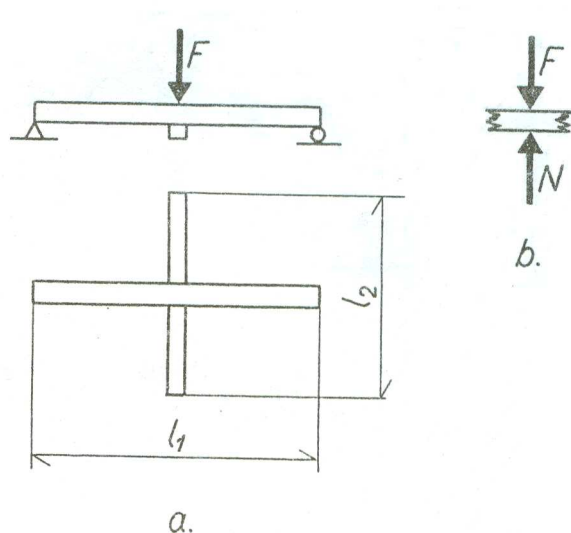
A tartó közepének elmozdulása:

$y_{x=2500} = -44,4$  mm, abszolút értéke azonos a 10. példában számított  $\delta$  értékkel.

### **13. Példa**

Valamely  $F$  súlyú terhet két, egymással derékszöget bezáró, kéttámaszú tartó hordoz. A terhelés és a tartók elrendezését az 80. ábra szemlélteti. A tartók anyagának rugalmassági tényezője  $E$ , keresztmetszeteik másodrendű nyomatéka  $I_1$ , ill.  $I_2$ .

Határozzuk meg a két tartó közös behajlását.



80. ábra

Megoldás.

Az 80/b. ábra szemlélteti az  $l_1$  hosszúságú gerenda közepén működő erőket:  $F$  és  $N$ . Ez utóbbi az alsó gerenda által a felsőre gyakorolt erő. Egy  $l$  támaszközű, közepén  $Q$

erővel terhelt tartó behajlása:  $y = \frac{Ql^3}{48EI}$ . Példánkban a felső gerenda behajlása tehát

$$y = \frac{(F - N)l_1^3}{48 EI_1}.$$

Az alsó gerenda ugyanekkora értékkel hajlik be, a deformáció:

$$y = \frac{Nl_2^3}{48 EI_2}.$$

A két deformáció egyenlőségéből  $N$  kiküszöbölésével:

$$y = \frac{F}{48E} \frac{l_1^3 l_2^3}{I_1 l_2^3 + I_2 l_1^3}.$$

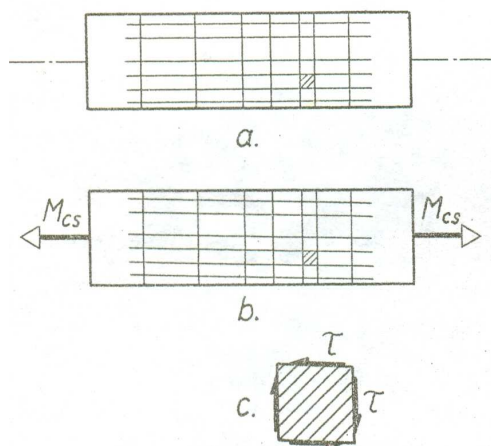
## 2.7. Csavarás

### CSAVARÓ IGÉNYBEVÉTEL

Ebben a tárgyponiban főként kör és körgyűrű keresztmetszetű. Egyenes tengelyű rudakkal foglalkozunk. Egy ilyen rúd valamely szelvényében az igénybevétel csavarás, ha a bal oldali erőrendszer olyan erőpárral egyenértékű, melynek síkja merőleges a rúd tengelyére. Más szóval: a bal oldali erőrendszer erőpár, melynek nyomaték vektora a rúd tengelyével párhuzamos.

### DEFORMÁCIÓ

A csavarásra igénybe vett rúdban ébredő feszültségek meghatározása végett vizsgáljuk meg egy olyan rúdszakasz deformálódását, melynek minden szelvényében  $M_{cs}$  csavaró nyomaték az igénybevétel (81. ábra). Ha a deformálódás előtt kijelölünk a rúd határoló felületén egy alkotókból és parallel-körökből álló derékszögű hálózatot, akkor a deformálódás után azt találjuk, hogy



**81.ábra**

- a henger alkotói csavarvonalakká deformálódnak,
- a parallel-körök továbbra is – azonos sugarú – körök maradnak, síkjaik merőlegesek a henger tengelyére és egymástól mért távolságuk változatlan marad.

A fentiek más szavakkal kifejezve azt jelentik, hogy a keresztmetszetek egymáshoz képest elfordulnak. Feltételezzük, hogy a keresztmetszetek mindegyike merev lemezként fordul el, tehát a körsugarak deformálódása után is egyenes szakaszok maradnak.

## FESZÜLTSEG

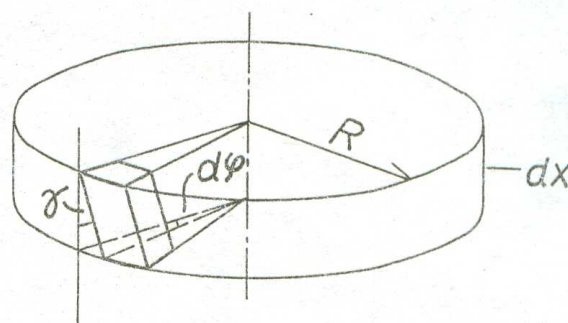
A fentiekben jellemzett deformáció következtében egy olyan – kicsiny él hosszúságú – hasáb, melyet a hengerből két parallel-kör síkja, valamint a tengelyen átmenő és azzal párhuzamos síkok határolnak (a 81. ábrán sraffozva), a következőképpen deformálódik: az él hosszak változatlanok maradnak, a hasáb két határoló lapja egymáshoz képest elcsúszik. A deformálódást az 81/c. ábra szemlélteti, az alakváltozást erősen túlozva. A hasáb ilyen alakváltozásával 1.5.-ben, illetve 2.2.-ben találkoztunk, s tudjuk, hogy ilyen esetben az elemi hasábban kijelölt pontban a feszültségállapot tiszta nyírás. A deformálódást előidéző feszültségek, melyek irányát az 81/c. ábrán láthatjuk.

**Tétel:** a csavarásra igénybe vett kör (körgyűrű) keresztmetszetű rúdnak a tengelyére merőleges metszete valamely pontjában fellépő  $\tau$  feszültség vektora merőleges a ponthoz tartozó sugárra.

Ha – a csavaró nyomaték nagysága  $M_{cs}$ ,

- a keresztmetszetnek a középpontjára vonatkozó poláris másodrendű nyomatéka  $I_p$ ,
- a pontnak a középponttól mért távolsága  $r$ , akkor a vizsgált pontban ébredő  $\tau$  feszültség nagysága:

$$\tau(r) = \frac{M_{cs}}{I_p} r.$$



82.ábra

A feszültség vektora a keresztmetszet síkjában fekszik, s a dualitás értelmében ugyanakkora feszültség ébred a szóban forgó- ponton átmenő a keresztmetszeti síkra merőleges síkon is (82. ábra).

A képletből kiolvasható, hogy a feszültség arányos a kérdéses pontnak a rúd tengelyétől mért távolságával.



## Bizonyítás

Vizsgáljuk meg részletesebben az imént látott kicsiny hasáb deformálódását. A 82. ábra a rúd egy olyan szeletét mutatja – deformálódás után – melynek két határoló paralelköre egymástól  $dx$  távolságra van.

Az ábra jelölései alapján a hasáb alakváltozását jellemző  $\gamma$  szög és a keresztmetszetek a  $d\varphi$  elcsavarodási szöge között a kapcsolat:

$$\gamma dx = R d\varphi, \quad \gamma = R \frac{d\varphi}{dx}.$$

A rúdnak a tengelyével párhuzamos egyenesi csavarvonalakká deformálódnak, ennek következtében a  $\gamma$  szög egy-egy alkotó mentén állandó. Ha a csavart rúd hossza  $l$  a végkeresztmetszetek elfordulása egymáshoz képest  $\varphi$ , akkor  $\gamma$  így is számítható:

$$\gamma = \frac{R\varphi}{l}.$$

A  $\gamma$  szög és a  $\tau$  feszültség közötti kapcsolat a rúd anyagának és  $G$  nyíró rugalmassági tényezőjének ismeretében a következő:

$$\tau = G\gamma = GR \frac{d\varphi}{dx} = GR \frac{\varphi}{l}.$$

A feszültségvektor merőleges a sugár irányú hasáb-élekre. Ha a tengelyről  $r$  távolságra lévő pontban vizsgálódunk (83. ábra), akkor hasonló megoldásokkal:

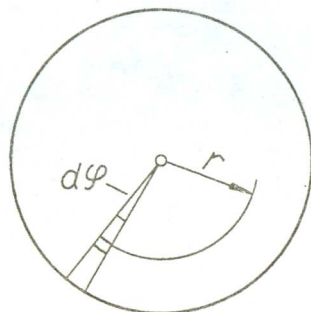
$$\tau = Gr \frac{\varphi}{l} = \text{const} \cdot r.$$

Mint látható, a  $\tau$  feszültség lineáris függvénye a tengelytől mért  $r$  távolságnak. A feszültség megoszlását az 84. ábra szemlélteti egy sugár mentén. A felhasznált geometriai, fizikai összefüggések után még egy sztatikai egyenletre van szükségünk,

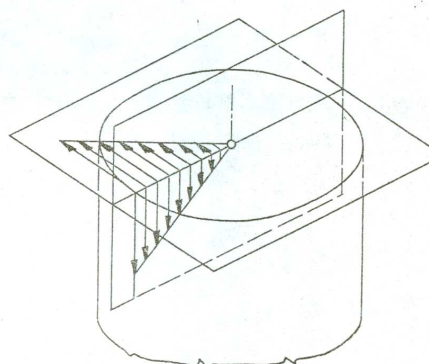
hogy a fenti képletben szereplő állandót tisztázzuk. Evégből írjuk fel a vizsgált szelvénytől egy oldalra eső erők nyomatékát a rúd tengelyére!

A rúdnak a szelvény által határolt egyik részére hat:  $M_{cs}$  és a keresztmetszet felületelemein  $\tau(r)dA$ . Ha a keresztmetszet területe  $A$ , akkor a tengelyre számított nyomaték összege:

$$M_{cs} - \int_{(A)} G \frac{\varphi}{l} r \cdot dA \cdot r = 0,$$



83.ábra



84.ábra

$$M_{cs} = G \frac{\varphi}{l} \int_{(A)} r^2 dA = \frac{G\varphi}{l} I_p = \frac{\tau(r)}{r} I_p, \quad \tau(r) = \frac{M_{cs}}{I_p} r, \quad \tau_{max} = \tau(R) = \frac{M_{cs}}{I_p} R.$$

Ha bevezetjük a  $K_p = \frac{I_p}{R}$  jelölést,  $\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{K_p} \cdot K_p$  a poláris keresztmetszeti tényező.

A fenti levezetésből a végkeresztmetszetek egymáshoz viszonyított elfordulása:

$$\varphi = \frac{M_{cs} l}{I_p G}.$$

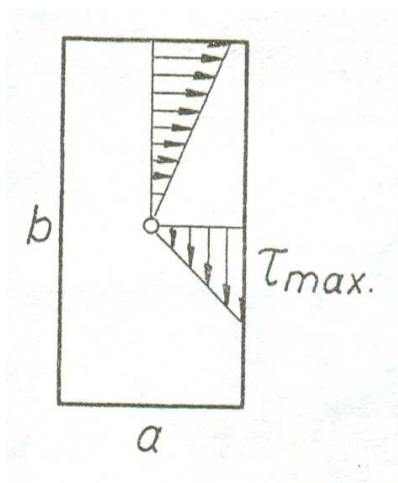
## A CSAVART RÚDBAN ÉBREDŐ FESZÜLTSEGEK ÁTTEKINTÉSE

A csavart rúd pontjaiban síkbeli feszültségállapot alakul ki. A feszültségek megoszlását egy módon már szemléltettük az 84. ábrán. Korábban (2.2.) már láttuk, hogy egy hasáb lapjain ható,  $\sigma$  és  $-\sigma$  komponensű normál feszültségek hatására a hasáb pontjaiban kialakuló feszültségállapot tiszta nyírás. Ha a 39. ábrát és a 85. ábra felső ábrarészletét összehasonlítjuk, megértjük, hogy a csavart rúd felületén a főfeszültségi irányok a henger alkotóival  $45^\circ$  szöget zárnak be. Az 85. ábra feltüntet egy húzó és egy nyomó főfeszültségi trajektoriát is.

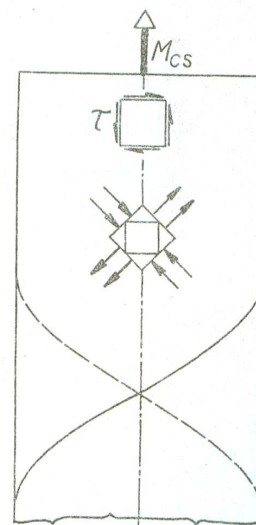
### MEGJEGYZÉS

Fenti eredményeink körgyűrű keresztmetszetű rudakra is érvényesek. Téglalap keresztmetszetű rudak csavarása esetén a feszültségek megoszlását – egy-egy középpontból kiinduló szakasz mentén – a 86. ábra szemlélteti. A maximális feszültség a hosszabbik oldal közepén lép fel,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs} (3b + 1,8a)}{a^2 b^2}.$$



86.ábra



85.ábra

### MÉRETEZÉS

Ellenőrzéskor a veszélyes szelvényben fellépő maximális feszültséget hasonlíthatjuk össze a csavarásra megengedett  $\tau_m$  feszültséggel. Teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{cs}}{K_p} \leq \tau_m.$$

Tervezés esetén rendszerint a csavart rúd veszélyes keresztmetszetének átmérőjét keressük a csavaró nyomaték és a megengedett feszültség ismeretében. A szükséges méret a poláris keresztmetszeti tényezőtől határozható meg:

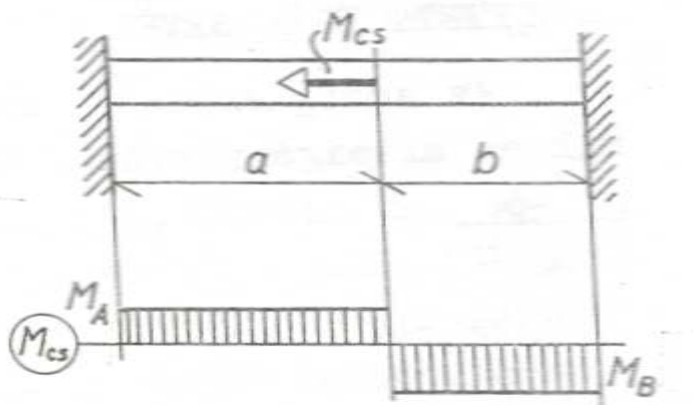
$$K_p = \frac{M_{cs}}{\tau_m}$$

#### A TERMÉSZETES FAANYAG CSAVARÓ IGÉNYBEVÉTELE

Láttuk, hogy a nyírás következtében a tengelyen átmenő síkokban is fellépnek  $\tau$  feszültségek. Tekintve, hogy e feszültségek csavart farudak esetén éppen rostirányúak, és a fa rostirányú nyírószilárdsága kicsiny, a csavart fa rudak tönkremenetele rostirányú felrepedés formájában jelentkezik.

#### 14. Példa

Az 87. ábrán látható, végein befogott hengeres rudat  $M_{cs}$  nyomatékú erőpár terheli.



87.ábra

Határozzuk meg a rúd, minimálisan szükséges  $d$  átmérőjét, ha a csavarásra megengedett  $\tau_m$  feszültség ismeretes!

Megoldás.

Először tisztázni kell a veszélyes szelvény helyét és a max. csavaró nyomatékot. Az  $M_{cs}$  csavaró nyomatékkal a rúd végein ható  $M_A$ ,  $M_B$  nyomatékú erőpárok tartanak

egyensúlyt, ahol  $M_A$ , és  $M_B$  a falak hatására a rúdra. A reakció nyomatékok sztatikai úton nem határozhatók meg, csupán annyit mondhatunk, hogy

$$M_{cs} - M_A - M_B = 0.$$

További egyenlet szilárdságtani megfontolással nyerhető: az  $a$ , ill.  $b$  hosszúságú tengelyszakaszok elcsavarodási szöge egyenlő, azaz:

$$\frac{M_A a}{I_p G} = \frac{M_B b}{I_p G}.$$

A fenti két egyenletből  $M_A = \frac{b}{a+b} M_{cs}$ ,  $M_B = \frac{a}{a+b} M_{cs}$ . Most már megszerkeszthető az igénybevételi ábra. Mivel  $a > b$  világos, hogy  $M_B$ -re kell méretezni, ez a maximális csavaró nyomaték, s a veszélyes szelvények a  $b$  hosszúságú rúdszakasz szelvényei.

$$K_p = \frac{M_B}{\tau_m} = \frac{a M_{cs}}{(a+b)\tau_m}.$$

Rövid számítással igazolható, hogy  $K_p = \frac{d^3}{16} \pi$ , tehát a szükséges tengely-átmérő

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 a M_{cs}}{(a+b)\pi\tau_m}}$$

## **2.8. Összetett igénybevételek I.**

### **ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL**

Az eddigiekben – egy kivételtől eltekintve – mindig valamilyen igénybevétel esetén kellett megállapítani a határ állapotnak (folyás, törés, elnyíródás) megfelelő feszültséget. Kivételt csak a közönséges hajlítás jelentett, ahol az igénybevétel egyidejűleg fellépő hajlítás és nyírás volt.

A következőkben arra a kérdésre keresünk választ, hogy több, egyidejűleg fellépő alap igénybevétel esetén hogyan ítéltjük meg a kialakuló feszültségállapotot a test valamely pontjában. Azt korábban (1.3) már láthattuk, hogy két egyensúlyi erőrendszer hatására a szilárd test tetszőleges pontjában kialakuló feszültségek az erőrendszerek egyidejű működtetése esetén vektorálisan összegeződnek, de még nyitva marad a kérdés, hogy az eredő feszültségállapot mikor tekinthető veszélyesnek.

Egyszerűbb a helyzet, ha az összetevő igénybevételek hatására a test vizsgált pontjában egytengelyű feszültségállapotok lépnek fel. Ebben a tárgyponban ilyen esetekkel foglalkozunk. Az összetevő igénybevételek hatására fellépő feszültségek ilyenkor azonos állásúak, irányuk egyező vagy ellentétes.

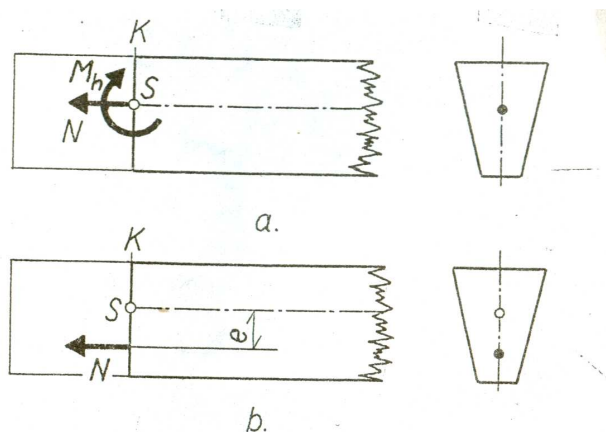
## HÚZÁS ÉS HAJLÍTÁS

Elsőként azt az esetet vizsgáljuk meg (88/a. ábra), amikor a rúd valamely K szelvényének igénybevétele egyidejűleg centrális húzás (N) és hajlítás ( $M_h$ ). Most is feltesszük, hogy a rúdnak van szimmetria síkja, s a hajlító erőpár nyomatékvektora erre merőleges. Ha a szelvényt terhelő belső erőrendszerek eredőit ( $N$ ,  $M_h$ )

összegezzük, egyetlen, eltolt hatásvonalú N erőt kapunk (59/b. ábra). Az eltolás mértéke

$$e = \frac{M_h}{N}.$$

Ha egy rúd valamely K szelvényére vonatkozólag a bal oldali erőrendszer eredője egyetlen, a rúd tengelyével párhuzamos hatásvonalú (balra mutató) erő, akkor a K szelvény igénybevétele



88.ábra

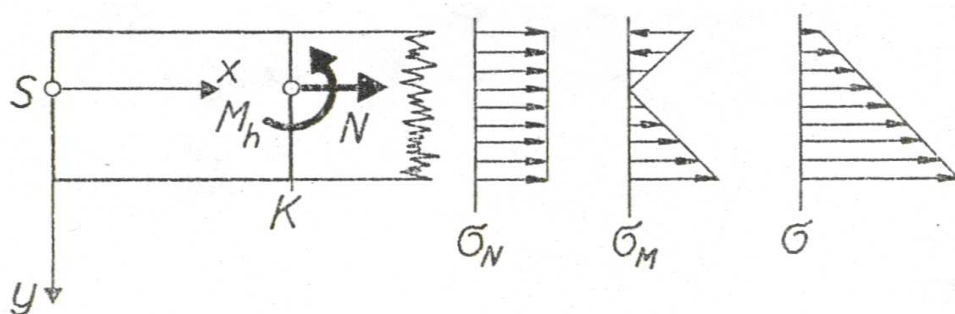
megegyezik az 88/b. ábrán látható esettel. Érthető, hogy az ilyen igénybevételt külponthozásnak is nevezik, az  $e$  távolság a külponthozás mértéke (excentricitás).

Számítsuk ki az egyidejű húzásból és hajlításból származó feszültségeket!

Ha a rúd keresztmetszet területe  $A$ , a hajlítás tengelyére vonatkozó másodrendű nyomatéka  $I_z$ , akkor az összetevő igénybevételek okozta feszültségek a következők:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}, \quad \sigma_M = \frac{M_h}{I_z} y.$$

Ezeket a feszültségeket (illetve megoszlásukat) a 89. ábra szemlélteti (a rúdra ható külső erőket az ábrán nem tüntettük fel). A  $K$  szelvény tetszőleges  $y$  koordinátájú pontjában az eredő feszültség az imént számított feszültségek algebrai összege:



**89.ábra**

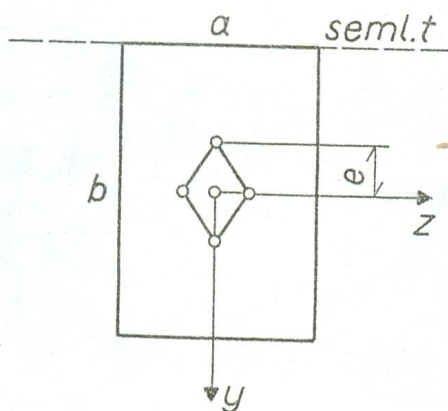
$$\sigma(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{I_z} y.$$

Az eredő feszültség megoszlását a 89. ábra jobb oldali részlete szemlélteti. Látható, hogy az adott esetben különböző nemű (húzó, nyomó) eredő feszültségek lépnek fel. Az őket elválasztó pontnak a térben egy a szimmetria síkra merőleges egyenes, a semleges tengely felel meg. Számítsuk ki ennek a helyét! A semleges tengely pontjaiban  $\sigma = 0$ . Legyen a szelvénynek a súlyponti tengelyre vonatkozó inerciasugara  $i_z$ . Ekkor

$$\sigma(y) = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{i_z^2 A} y = 0, \quad y = -\frac{i_z^2}{e}.$$

Ha a semleges tengely a keresztmetszeten kívül helyezkedik el, akkor a szelvény pontjaiban egynemű feszültségek ébrednek. Ha semleges tengely a szelvényt metszi, akkor különböző neműek. Létezik  $M_h$  és  $N$ -nek olyan aránya: másképpen olyan maximális  $e$  érték, melynél még éppen egynemű feszültségek ébrednek a szelvényen.

Számítsuk ki ezt a maximális értéket téglalap szelvény esetén, ha a téglalap oldalai  $a$ ,  $b$  (90. ábra)!



90.ábra

Határesetben a semleges tengely koordinátája  $-\frac{b}{2}$  vagy  $\frac{b}{2}$ . Mivel téglalap esetén az inerciasugár  $i_z^2 = \frac{b^2}{12}$ ,  $y = -\frac{b}{2} = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{b^2}{12e}$ ,  $e = \frac{b}{6}$ .

Hasonló tulajdonságú további pontokat szemléltetnek a 61. ábra nullkörei. A négy pont által meghatározott rombusz a szelvény magidoma.

Tulajdonsága: a magidomon belül ható  $s$  a szelvény síkjára merőleges hatásvonalú  $N$  erő esetén a szelvény pontjaiban azonos nemű (húzó vagy nyomó) feszültségek ébrednek. A magidom alakja csak a szelvény geometriai viszonyaitól függ, a legfontosabb szelvény alakok magidomának adatait táblázatok tartalmazzák.

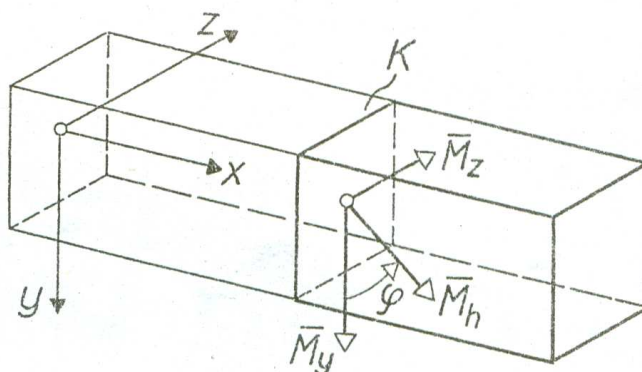
Teljesen e szakaszhoz hasonlóan tárgyalható az egyidejűleg fellépő nyomás és hajlítás (külponos nyomás). Ennek átgondolását az olvasóra bízunk.

## FERDE HAJLÍTÁS

Foglalkozunk most azzal az esettel, mikor egy rúd valamely szelvényét egyidejűleg két hajlító erőpár terheli!

Legyen a 91. ábrán látható rúd  $K$  szelvényének igénybevétele az  $\overline{M}_y$  és  $\overline{M}_z$  nyomatékvektorokkal adva. Az ábrával kapcsolatban megjegyezzük, hogy a rúdat terhelő külső erőrendszer ezúttal sem tüntettük fel. Feltételezzük, hogy a rúd téglalap keresztmetszetű,  $s$  a hajlító erőpárok síkjai azonosak a rúd szimmetriásíkjával.





91.ábra

Két kérdésre keresünk választ:

- milyen feszültségek ébrednek a szelvény pontjaiban,
- hogyan helyezkedik el a semleges tengely?

Ha a szelvény igénybevétele  $M_z$  lenne, akkor az ébredő feszültség az ismert képlet szerint a

$$\sigma_h(y) = \frac{M_z}{I_z} y$$

Képlettel adódna.

Ha pedig csupán  $M_y$  hatna, akkor hasonlóan:

$$\sigma_h(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

feszültség ébredne. E formulákban  $I_y$ ,  $I_z$  a szelvény megfelelő másodrendű nyomatékai. A legutolsó képlet előjelével kapcsolatban vegyük észre, hogy  $+z$ -hez most nyomófeszültség tartozik. Mindkét igénybevétel esetében azonos állású feszültségvektorok ébrednek, összeadásuk ismét algebrai úton végezhető el:

$$\sigma_h(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z.$$

Állítsuk elő a semleges vonal egyenletét. Ennek pontjaiban  $\sigma_h(y, z) = 0$ ,

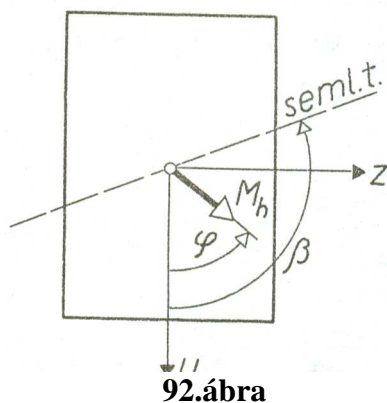
tehát:

$$\frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z = 0.$$

Ez olyan egyenes egyenlete, mely áthalad a szelvény súlypontján és iránytangense:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_z}{I_z} \frac{I_y}{M_y}.$$

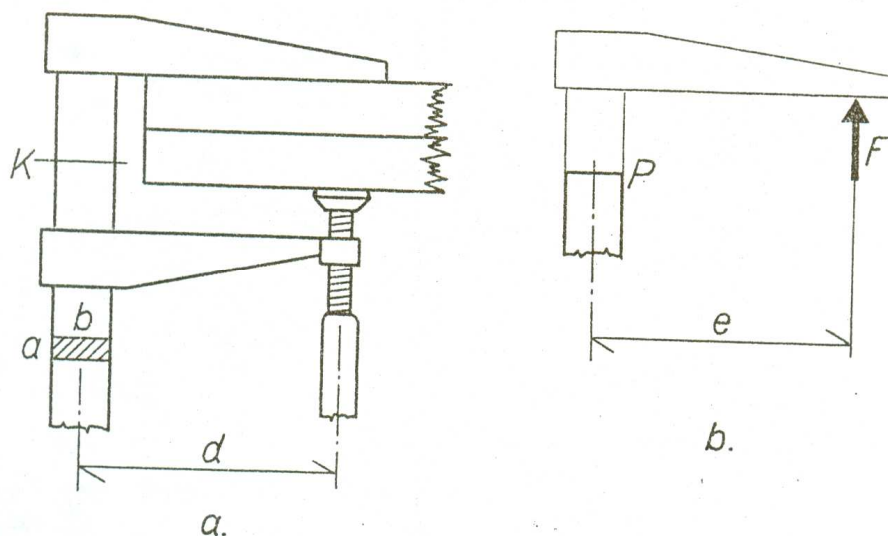
A 92. ábra jelölésével  $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi \frac{I_y}{I_z}$ . A 92. ábráról az is leolvasható, hogy az eredő



$\bar{M}_h = \bar{M}_y + \bar{M}_z$  nyomatékvektor általában nem azonos állású a semleges tengellyel, másképpen: a terhelő erőpár síkja nem merőleges a semleges tengelyre. A hajlítás ilyen esetét ezért ferde hajlításnak nevezik. A feszültség képletéből következik, hogy a szelvény azonos feszültségű pontjai egy-egy, a semleges tengellyel párhuzamos egyenesen vannak, és  $|\sigma_h|$  annál nagyobb, minél

messzebb van az azonos feszültségű pontok egyenese a szelvény súlypontjától. Ennek folyománya, hogy a legnagyobb feszültségű pontok a szelvénynek a semleges tengelytől legtávolabbi csúcspontjai.

## 15. Példa



93.ábra

Határozzuk meg a 93. ábrán látható pillanatszorító szárának K szelvényében ébredő maximális feszültséget a következő adatok ismeretében:

$$a = 6 \text{ mm}, \quad b = 30 \text{ mm}, \quad d = 120 \text{ mm},$$

$$F = 1000 \text{ N (a lemezeket összeszorító erő)}.$$

Megoldás.

A K szelvény igénybevétele a 93/b. ábra szerint: külpontos húzás, a külpontosság mértéke  $e = d$ .

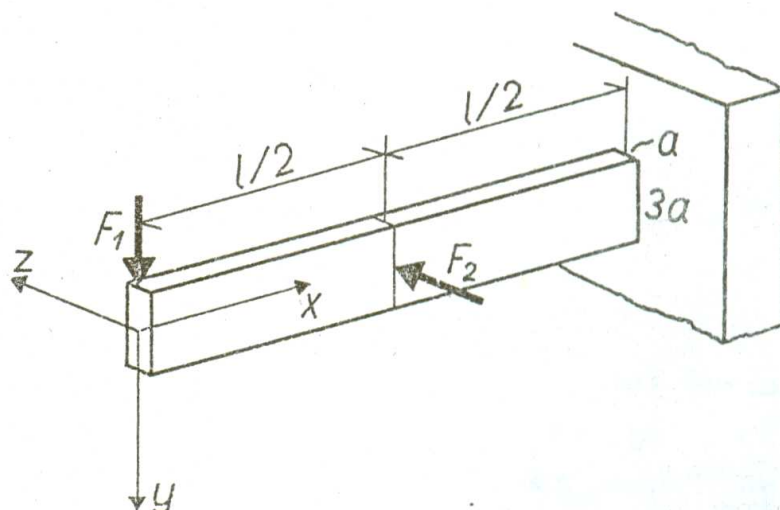
A maximális feszültség a szelvény P pontjában ébred:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{K}, \quad \text{ahol } A = ab = 180 \text{ mm}^2, \quad e = 120 \text{ mm}, \quad K = \frac{ab^2}{6} = 900 \text{ mm}^3,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1000}{180} + \frac{1000 \cdot 120}{900}, \quad \underline{\underline{\sigma_{\max} = 138,9 \text{ N/mm}^2}}.$$

## 16. Példa

Számítsuk ki a 94. ábrán látható konzoltartó veszélyes szelvényében a maximális  $\sigma$  feszültséget és határozzuk meg a semleges tengely helyzetét. Adatok:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $F_1 = 800 \text{ N}$ ,  $F_2 = 200 \text{ N}$ .



94.ábra

Megoldás.

A tartót az  $F_1$ ,  $F_2$  erőkől álló erőkereszt terheli. A veszélyes szelvény a befogadás szelvénye. A keresztmetszet másodrendű nyomatékai:

$$I_z = \frac{1030^3}{12} = 22\,500 \text{ cm}^3, \quad I_y = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2\,500 \text{ cm}^3.$$

A hajlító nyomatékok:

$$M_y = F_2 \frac{l}{2} = 20\,000 \text{ Ncm}, \quad M_z = -F_1 l = -160\,000 \text{ Ncm}.$$

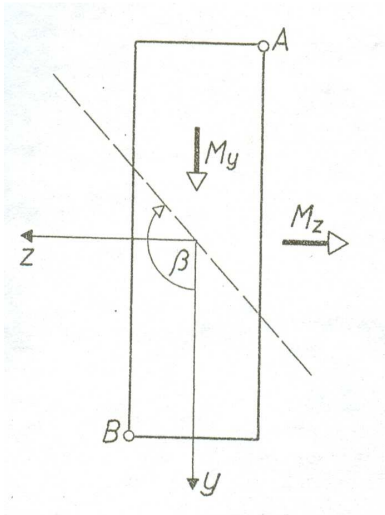
Először állapítsuk meg a semleges tengely helyzetét:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} = \frac{-160\,000}{20\,000} \frac{2\,500}{22\,500} = -0,889$$

$$\underline{\underline{\beta = 138^\circ 22'}}.$$

A 95. ábra szemlélteti a semleges tengely helyzetét.

A legnagyobb feszültségek a semleges tengelytől legtávolabbi pontokban (A, B) ébrednek:



95.ábra

$$\sigma_A = \sigma(-15, -5) = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{-160000}{22500} (-15) - \frac{20000}{2500} (-5),$$

$$\underline{\underline{\sigma_A = 1,47 \text{ N/mm}^2}}, \quad \underline{\underline{\sigma_B = -1,47 \text{ Nmm}^2}}.$$

## 2.9. Összetett igénybevételek II.

### FESZÜLTSEGELEMÉLETEK

Ha az összetevő igénybevételek hatására kialakuló feszültségállapotok síkbeliek vagy térbeliek, az eredő feszültségállapot veszélyességének megítélése körülményesebb, teljesen megnyugtató módon ma sem megoldott feladat.

A probléma megoldására szolgáló elgondolások, az ún. feszültség-elméletek kiinduló feltevése az, hogy a határállapot szempontjából minden feszültségállapot egyenértékű valamely egyszerű kísérlettel is előállítható feszültségállapottal. Összehasonlítható

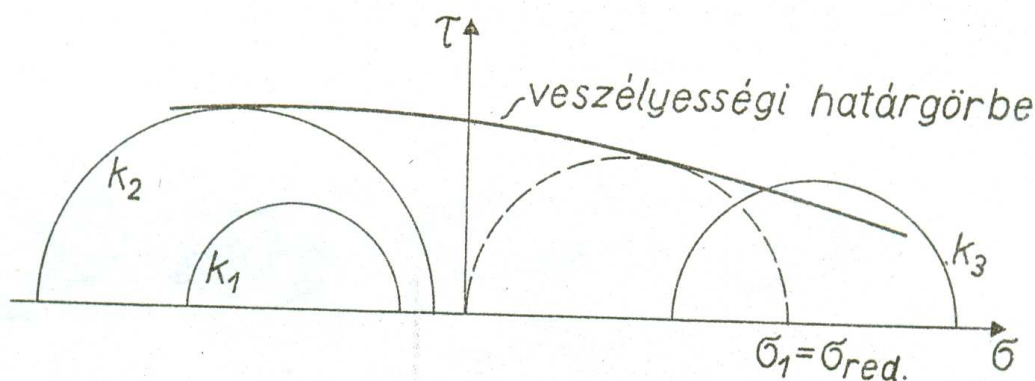
feszültségállapotként célszerű a húzást választani, mert ezt a feszültségállapotot tudjuk a legegyszerűbben és legpontosabban megvalósítani.

A feszültségelméletek egy összetett igénybevétel hatására kialakuló feszültségállapot adataiból egy  $\sigma_{red}$  redukált feszültséget vezetnek le. A  $\sigma_{red}$  értékkel jellemzett húzás ( $\sigma_1 = \sigma_{red}$ ) veszélyesség szempontjából egyenértékű az adott többtengelyű feszültségállapottal.

A különböző feszültségelméletek más-más módon vezetnek le a redukált feszültséget. Ennek megfelelően az eredmények többé-kevésbé eltérőek. Az alábbiakban egy feszültségelméletet ismertetünk részletesebben.

### A MOHR-FÉLE FESZÜLTSGELMÉLET

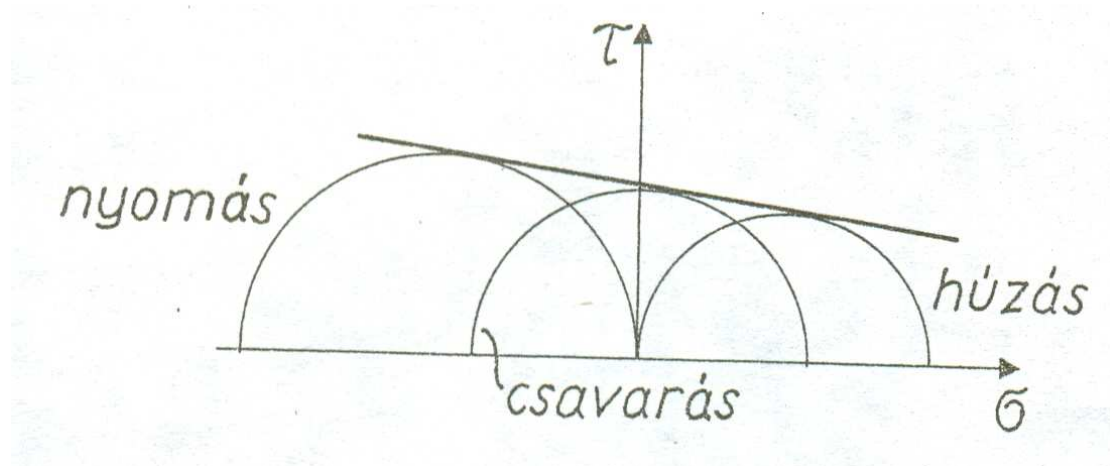
A Mohr-féle feszültségelmélet abból a feltevésből indul ki, hogy a rugalmas anyagú test valamely pontjában a határállapotot előidéző feszültség állapotok feszültség diagramjainak (pontosabban: a feszültségi diagramok főköreiről, a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  pontokon átmenő körívekről van szó) létezik egy burkoló görbéje, a veszélyességi határgörbe (96.ábra), mely a határállapot szempontjából veszélytelen, ill. veszélyes feszültség állapotok feszültségi köreit elválasztja.



96.ábra

Részletesebben:

- egy-egy feszültség állapot veszélyességét az dönti el, hogy a feszültségi főkör metszi- (érinti)-e a vagy sem a veszélyességi határgörbét. Tehát például a  $k_1$  kör veszélytelen feszültségállapotot szemléltet, a  $k_2, k_3$  veszélyeset.
- az elmélet szerint a  $\sigma_2$  főfeszültségek szerepe lényegtelen, csupán a  $\sigma_1$  és a  $\sigma_3$  főfeszültségektől függ az adott feszültségállapot veszélyessége.
- a veszélyes feszültségállapotok közül nevezetes a – 96. ábrán szaggatott vonallal ábrázolt – tiszta húzás, mely veszélyesség szempontjából egyenértékű mindazon feszültség állapotokkal, melyek feszültségi körei a határgörbét érintik. Ennek  $\sigma_1$  főfeszültsége az adott veszélyességi határgörbéhez tartozó redukált feszültség.



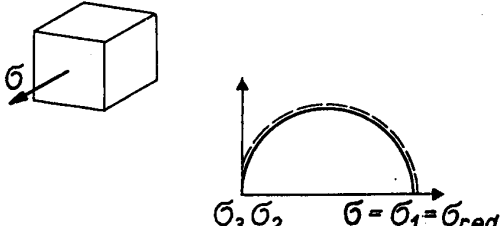
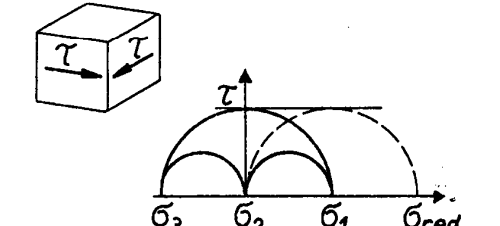
97.ábra

A veszélyességi határgörbe jelentősége a fentiekből nyilvánvaló: lehetőséget nyújt tetszőleges – kísérlettel meg sem valósított – feszültségállapot megítélésére. Attól függően, hogy a határállapotot miképpen definiáljuk, különböző határgörbék léteznek. A határgörbe az anyagi minőségnek is függvénye. A határállapot definiálása után a görbe meghatározása kísérletekkel történhet. Közelítőleg a 97. ábra szerint szerkeszthetjük meg a határgörbét, a húzás, csavarás és nyomás feszültségei köreinek ismeretében. Mivel az acél anyagok nagy része húzásra és nyomásra közelítőleg egyformán viselkedik, vagyis a megfelelő feszültségi körök egyenlő átmérőjűek, gyakran alkalmazott egyszerűsítő föltevés, hogy a határgörbe a  $\sigma$ - tengellyel párhuzamos egyenes.

Számítsuk ki a redukált feszültséget ezzel a föltevessel! Az eredményeket az I. és II. táblázat szemlélteti. Az I. táblázat az alap igénybe vételekre, a II. az összetett igénybevételekre vonatkozik.

A II. táblázatban szereplő redukált feszültség-értékek, a feszültségi diagramokról leolvasható geometriai összefüggések alapján vezethetők le. Például térbeli feszültségállapot esetén

I.táblázat

Az igénybe- vétel	A feszültségállapot szemléltetése	$\sigma_{red}$
<p>Húzás <math>\sigma = \frac{N}{A}</math></p> <p>Hajlítás <math>\sigma = \frac{M_h}{K}</math></p>	 <p>The diagram shows a 3D cube with a horizontal arrow labeled <math>\sigma</math> pointing to the right, representing tension. To its right is a 2D stress distribution diagram. The vertical axis is labeled <math>\tau</math> and the horizontal axis is labeled <math>\sigma</math>. A semi-circular curve starts at the origin <math>(0,0)</math> and ends at <math>\sigma_{red}</math> on the horizontal axis. The horizontal axis is also marked with <math>\sigma_3</math> and <math>\sigma_2</math> near the origin, and <math>\sigma = \sigma_1 = \sigma_{red}</math> at the end of the curve.</p>	$\sigma$
<p>Nyírás <math>\tau = \frac{T}{A}</math></p> <p>Csavarás <math>\tau = \frac{M_{cs}}{K_p}</math></p>	 <p>The diagram shows a 3D cube with two horizontal arrows labeled <math>\tau</math> pointing in opposite directions on opposite faces, representing shear. To its right is a 2D stress distribution diagram. The vertical axis is labeled <math>\tau</math> and the horizontal axis is labeled <math>\sigma</math>. A full circular curve is centered on the horizontal axis, starting at <math>\sigma_3</math> and ending at <math>\sigma_1</math>. The horizontal axis is also marked with <math>\sigma_2</math> and <math>\sigma_{red}</math> at the end of the curve.</p>	$2\tau$



II.táblázat

Az igénybe- vétel	A feszültségállapot szemléltetése	Főfeszültségek Redukált fesz.
Húzás, (v.hajlítás) Nyomás		$\sigma_1 = \sigma_x$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = \sigma_z$ $\sigma_{red} = \sigma_x - \sigma_z$
Húzás, (v.hajlítás) Csavarás		$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$ $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}$
Hajlítás, Nyírás		$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$ $\sigma_3 = \sigma_z$ $\sigma_{red} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} - \sigma_z$

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3, \text{ ahol } \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$$

(a  $\sigma_2, \sigma_1$  átmérőjű körben található derékszögű háromszög alapján),  $\sigma_3 = \sigma_z$ .

A redukált feszültség tehát:

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} - \sigma_z.$$

A kísérletek azt mutatják, hogy – ellentétben a Mohr-féle feltevésével – a határállapot előidézésében a  $\sigma_2$  főfeszültségnek is szerepe van. A Mohr-elmélet alapján számított redukált feszültség a helyes értéktől maximálisan mintegy 10 %-al eltérhet.

## MÉRETEZÉS

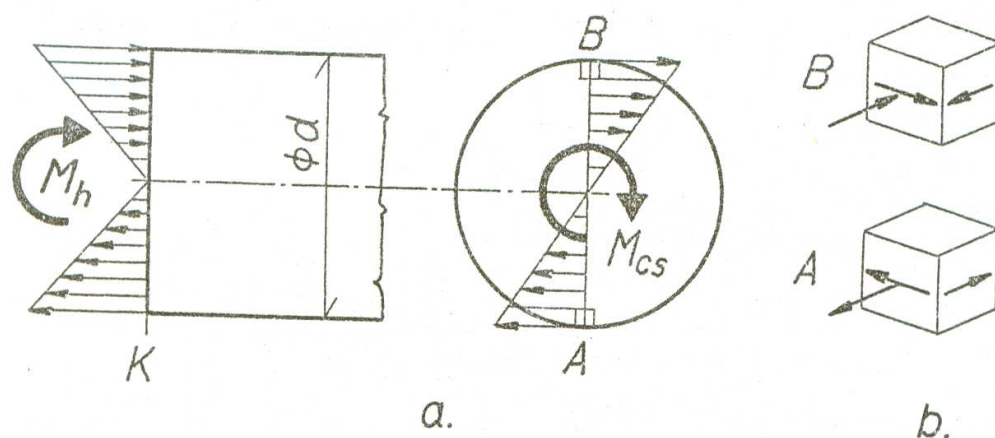
Ellenőrzéskor azt kell kimutatni, hogy a redukált feszültség nem haladja meg a megengedett feszültséget:

$$\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_m \cdot$$

Tervezéskor úgy kell meghatározni a szerkezet méreteit, hogy a legveszélyesebb pontban számítható redukált feszültség ne haladja meg a megengedett feszültséget.

## HAJLÍTÁS ÉS CSAVARÁS

Alkalmazzuk most az eddigieket abban – a gyakorlatban sokszor előforduló – esetben, mikor egy hengeres tengely valamelyik K szelvényének igénybevétele egyidejűleg hajlítás és csavarás (98. ábra).



98.ábra

A K szelvényen ébredő feszültségek a következők:

- a hajlításból  $\sigma_h = \frac{M_h}{I_z} y$ ,
- a csavarásból:  $\tau = \frac{M_{cs}}{I_p} r$

(A fenti képletekben  $I_z$ ,  $I_p$  a keresztmetszet másodrendű nyomatékai).

A keresztmetszet legveszélyesebb pontja az A és a B pont. E pontokban  $\sigma$  és  $\tau$  egyaránt maximális. A feszültségvektorok helyzetét az A és B pont kis környezetében elkülönített elemi hasábokon a 69/b. ábra szemlélteti. A redukált feszültség a II. táblázat szerint.

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M_h^2}{K_z^2} + 4 \frac{M_{cs}^2}{(2K_z)^2}} = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{K_z}.$$

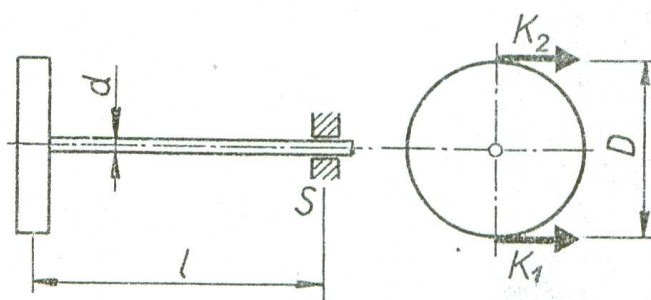
( $K_z$  a keresztmetszeti tényező. Felhasználtuk, hogy  $K_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{4I_z}{d} = 2K_z$ .) Amint látható, a redukált feszültség egyenlő azzal a hajlító feszültséggel, mely az adott szelvényben  $M_{\text{red}} = \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}$  ún. redukált hajlító nyomaték hatására ébred.

A tengely méretezése így folytatható:

$$K_z = \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{red}}}, \quad \sigma_{\text{red}} \leq \sigma_m, \quad K_z = \frac{d^3 \pi}{32},$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{\pi \sigma_m}}.$$

### 17. Példa



99.ábra

A 99. ábrán látható tengely szabad végén  $G$  súlyú szíjtárcsa van felerősítve. A szíjban ébredő erő  $K_1$ ,  $K_2$ .

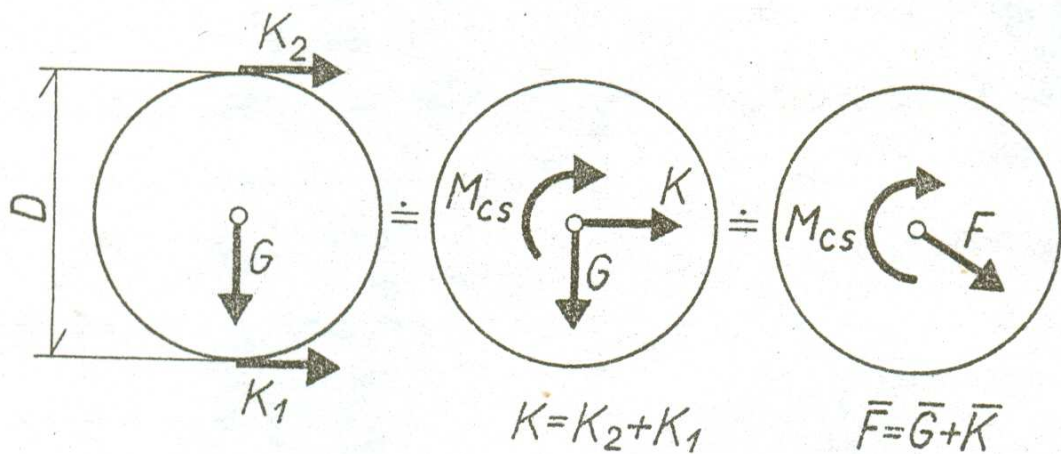
Számítsuk ki a tengely minimálisan szükséges  $d$  átmérőjét, ha  $l=1$  m,

$$D=0,6 \text{ m}, K_1=1500, K_2=2000 \text{ N}, G=600 \text{ N}, \sigma_m=120 \text{ N/mm}^2.$$

Megoldás.

Az igénybevételek meghatározása végett egyszerűsítsük a tárcsára ható erőrendszert!

Az egyszerűsítés a 100. ábrán nyomon követhető. Az S szelvény igénybevételei:



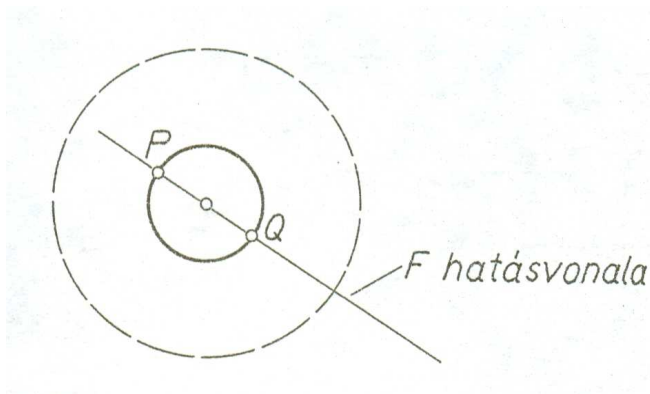
100.ábra

$$M_h = Fl = \sqrt{G^2 + K^2} l = 355106 \text{ Ncm.}$$

$$M_{cs} = (K_2 - K_1) \frac{D}{2} = 500 \cdot 30 = 15000 \text{ Ncm.}$$

A szelvény veszélyes pontjai a 101. ábrán P, Q-val jelölt pontok, melyekben a hajlítás és csavarás következtében ébredő feszültségek legkedvezőtlenebbül összegződnek. Megemlítjük, hogy a hajlítás okozta nyírás következtében fellépő  $\tau$  feszültségeket ezúttal elhanyagoltuk. (P és Q-ban ezek értéke egyébként nulla.)

A keresett tengelyátmérő ezek után:



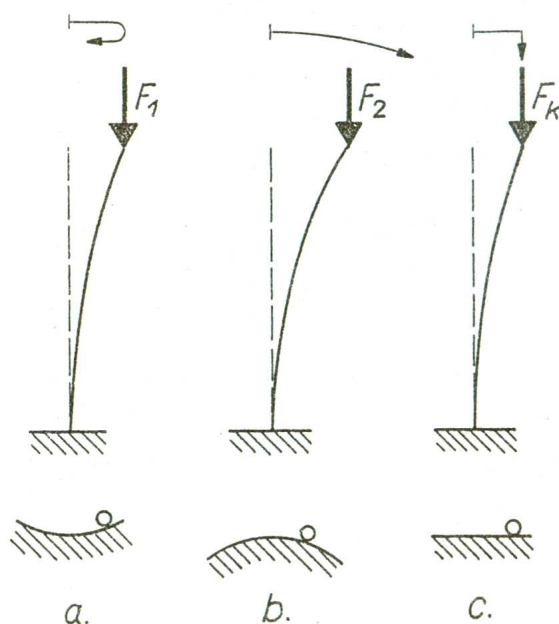
$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M_h^2 + M_{cs}^2}}{\pi \sigma_m}} = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{3551060^2 + 150000^2}}{\pi \cdot 120}},$$

$$\underline{d = 67,1 \text{ mm.}}$$

## 2.10. Kihajlás

### A KIHAJLÁS JELENTŐSÉGE

A 2.1. tárgyponthoz a nyomó igénybevétellel kapcsolatosan megemlítettük, hogy ottani kijelentéseink csak zömök nyomott elemekre vonatkoznak, karcsú nyomott rudakra az ott elmondottak általában nem érvényesek.



102.ábra

Hogy a gyakorlatban sokszor előforduló karcsú rudak esetén is kezelni tudjuk, vizsgáljuk meg a 73/a. ábrán látható, egyik végén befogott karcsú rudat, melyet  $F_1$  koncentrált erő terhel. Tapasztalatból tudjuk, hogy ha  $F_1$  elegendően kicsiny, akkor a rúd felső végpontját kitérítve, a rúd továbbra is képes hordozni a terhet, s a kitérítés hatást megszüntetve a rúd – többkevesebb lengés után – visszatér eredeti helyzetébe. Az  $F_1$  erővel terhelt rúd viselkedése hasonlít annak a súlyos golyónak a viselkedéséhez, melyet a 102/a. ábra alsó része szemléltet: a vályúba helyezett golyó ugyanis – nem túl nagy kitérés esetén – szintén visszatér eredeti helyzetébe. A fenti hasonlóság alapján azt mondhatjuk, hogy a golyó s a rúd stabilis egyensúlyi állapotban van. Megterhelhetjük azonban olyan  $F_2$  erővel a rudat, hogy az a legcsekélyebb kitérítés után sem tér már vissza eredeti helyzetébe, sőt a kitérés egyre fokozódik, a rúd eltörik, tönkremegy. A rúd viselkedése most egy bizonytalan egyensúlyi állapotú golyó viselkedésével állítható párhuzamba (102/b. ábra alsó részlete).

Végül található egy olyan  $F_k$  kritikus terhelés is, melynél a rúd egyensúlyi állapota közömbös. Ez azt jelenti, hogy a kritikus erővel terhelt és kitérített rúd magára hagyva nem tér vissza eredeti helyzetébe, hanem megmarad deformált állapotában.

Hogy a gyakorlatban sokszor előforduló karcsú rudak esetén is kezelni tudjuk, vizsgáljuk meg a 73/a. ábrán látható, egyik végén befogott karcsú rudat, melyet  $F_1$  koncentrált erő terhel. Tapasztalatból tudjuk, hogy ha  $F_1$  elegendően kicsiny, akkor a rúd felső végpontját kitérítve, a rúd továbbra is képes hordozni a terhet, s a kitérítés hatást megszüntetve a rúd – többkevesebb lengés után – visszatér eredeti helyzetébe. Az  $F_1$  erővel

Viselkedése megfelel egy közömbös egyensúlyi helyzetben lévő golyóéénak. A fentiekben használt jelölésekkel  $F_1 < F_k < F_2$ .

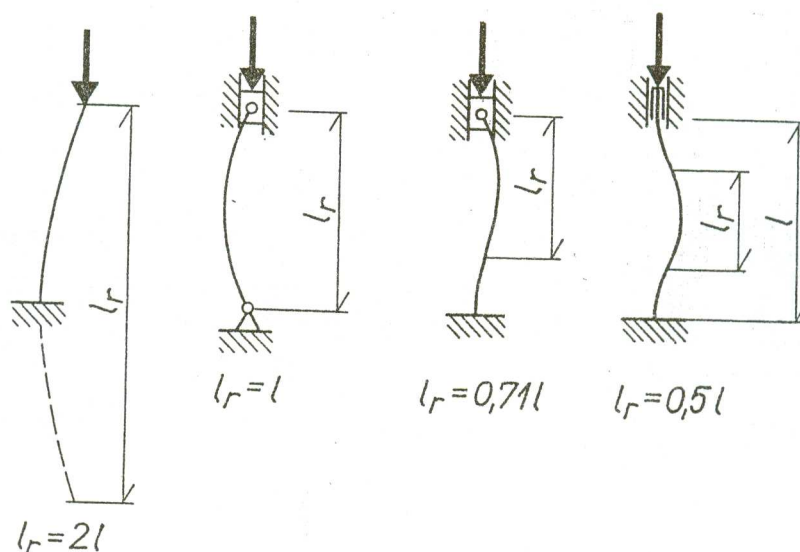
## RUGALMAS KIHAJLÁS

Az eddigiekből megérthető, hogy nagy jelentősége van a kritikus erő meghatározásának, hiszen ez az erő már a rúd tönkremenetelét okozza oly értelemben, hogy az  $F_k$ -nál nagyobb nyomóerő hatása alatt álló rúd a legkisebb oldalirányú erő hatására tönkremegy.

Nyilvánvaló, hogy a kritikus erő nem csupán a rúd anyagától, hanem geometriai adataitól is függ, hiszen azonos anyagú és keresztmetszetű, de különböző hosszúságú rudak különböző nagyságú nyomóerő hatására jutnak labilis állapotba.

A kritikus erő hatására a rúdban fellépő feszültség a kritikus feszültség:  $\sigma_k = \frac{F_k}{A}$ , ahol

A rúd keresztmetszet-területe. Aszerint, amint  $\sigma_k$  kisebb, vagy nagyobb, mint a rúd anyagának arányossági határa, beszélünk rugalmas és plasztikus kihajlásról. A centrikusan nyomott rúd rugalmas vonala differenciál egyenletének vizsgálata alapján bebizonyítható, hogy a kihajlott rúd tengelyvonala szinuszcörbe alakú. A továbbiakban fontos szerepe van a tengelyvonal, által alkotott szinuszcörbe fél hullámhosszának, melyet redukált hossznak ( $l_r$ ) nevezünk. A rugalmas vonal alakja a megfogás módjától függ. A leggyakrabban előforduló megfogás módokat, tengelyvonal-alakokat és redukált hosszakat a 103. ábra szemlélteti.



103. ábra

További fontos geometriai jellemzője a rúdnak a karcsúság, melyet a redukált hossz és a minimális inercia sugár ( $i_2$ ) szab meg:

$$\lambda = \frac{l_r}{i_2}.$$

A fenti fogalmak birtokában a centrikusan nyomott rúd kritikus feszültsége – ha a rúd anyagának rugalmassági modulusa  $E$  – EULER szerint a következő:

A  $\sigma_k = \sigma_k(\lambda)$  függvényt a 104. ábra szemlélteti. A függvény olyan karcsúságok esetén érvényes, melyeknél fennáll:

$$\sigma_k \leq \sigma_A.$$

Számítsuk ki azt a legkisebb  $\lambda_e$  karcsúságot, melyre érvényes a kritikus feszültség fenti képlete!

$$\lambda_e = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}. \quad \text{Acél anyagok}$$

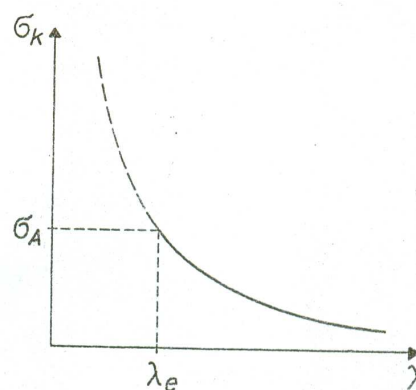
rugalmassági tényezőjét és arányossági határát figyelembe véve

$\lambda_e \approx 100$ . A  $\lambda \geq \lambda_e$  karcsúságú nyomott rúd teherbírása, azaz a kritikus erő ( $F_k$ ) a rúd-kereszt metszet területének ( $A$ ), minimális másodrendű nyomatékának ( $I_2$ ), a redukált hosszának ( $l_r$ ) és a rugalmassági tényezőnek  $E$  ismeretében így számítható:

$$F_k = A\sigma_k = A \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{l_r}{\sqrt{\frac{I_2}{A}}}, \quad F_k = \frac{\pi^2 E I_2}{l_r^2}.$$

## PLASZTIKUS KIHAJLÁS

Ha  $\lambda < \lambda_e$ , akkor a kritikus feszültség levezetésének alapját képező megfontolások érvényüket veszítik, az EULER-féle képlet nem alkalmazható. E képlet felállításánál ugyanis a rugalmas vonal differenciálegyenletéből indulunk ki. A differenciálegyenlet



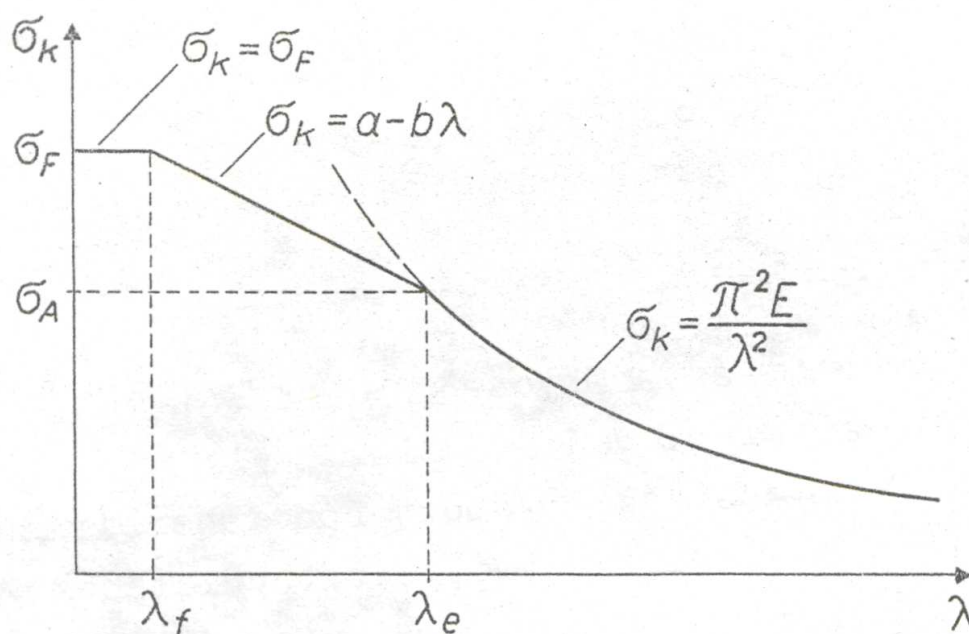
104.ábra

levezetésénél viszont feltesszük, hogy a fellépő feszültségek az arányossági határt nem lépik túl.  $\lambda < \lambda_e$  esetén egy TETMAJER kísérletei alapján megállapított képlet használható, mely lineáris kapcsolatot mond ki a karcsúság és a kritikus feszültség között:

$$\sigma_k = a - b\lambda.$$

A képletben a és b rúd anyagától függő állandók, értékük műszaki táblázatokból vehető.

Ezzel a képlettel számolhatunk mindaddig, míg  $\lambda < \lambda_e$  mellett  $\sigma_k < \sigma_F$ . Egészen kis karcsúságú rudak esetén a rúd tönkremenetele a folyáshatár elérésekor következik be. A kritikus feszültségnek a karcsúságtól való függését a 105. ábra szemlélteti összefoglalóan:



105.ábra

## MÉRETEZÉS

Ellenőrzéskor a keresztmetszet adatai ( $A, i_2$ ) és a megfogás módjának ( $l_f$ ) ismeretében megállapíthatjuk  $\lambda$ -t. Ha  $\lambda \geq \lambda_e$ , akkor rugalmas, ha  $\lambda < \lambda_e$  plasztikus kihajlásról van szó. Ezután a rúd anyagának ( $E, a, b$ ) ismeretében meghatározzuk a kihajlásra megengedett feszültséget,  $\sigma_{km}$ -et. Ezt úgy kapjuk, hogy a kritikus feszültséget osztjuk

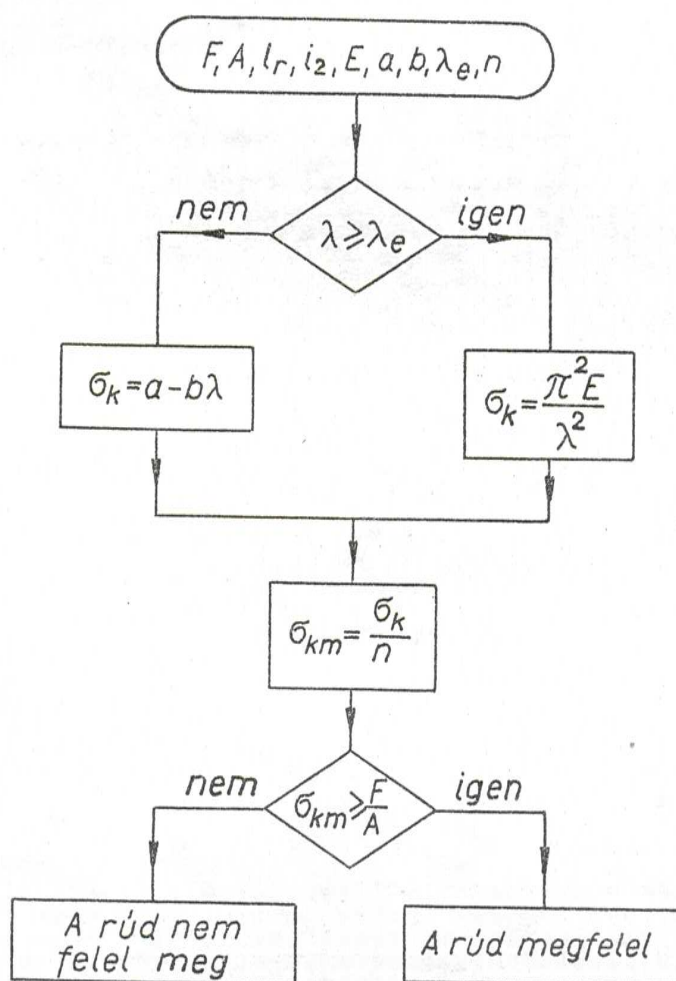


egy  $n$  biztonsági tényezővel. Rugalmas kihajlás esetén  $n=3\dots 6$ , plasztikus kihajlás esetén  $n=1,7\dots 4$ .

Ha a vizsgált rúdra ható erő  $F$ , a rúd keresztmetszet-területe  $A$ , a rúd megfelelő, ha

$$\sigma_{km} = \frac{\sigma_k}{n} \geq \frac{F}{A}.$$

Az ellenőrzés menetét az alábbi folyamatábra szemlélteti (77. ábra).



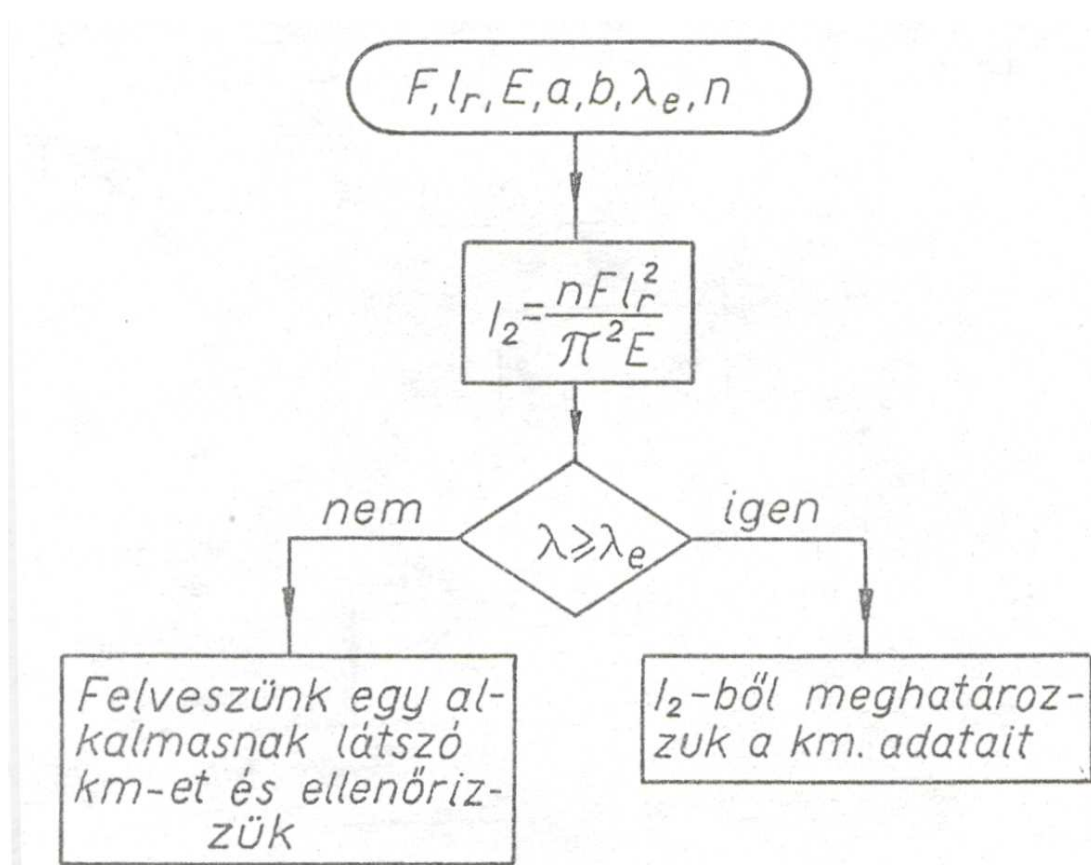
106.ábra

Tervezéskor az eljárás kissé bonyolult. Mivel a keresztmetszet adatait nem ismerjük, a karcsúság nem határozható meg, tehát nem tudjuk előre, hogy rugalmas vagy plasztikus kihajlásról van-e szó.

A következőképpen járhatunk el: az adott terhelőerő ismeretében,  $n$ -szeres biztonságot felvéve és rugalmas kihajlást feltételezve, a kritikus erő képletéből kiszámítjuk  $I_2$ -t.

$$F_k = nF = \frac{\pi^2 E I_2}{l_r^2}, \quad I_2 = \frac{nF l_r^2}{\pi^2 E}.$$

Ismert alakú keresztmetszet esetén  $I_2$ -ből a keresztmetszet minden adata számítható. Szükséges azonban még igazolni, hogy kiinduló feltevésünk helytálló, azaz, hogy a rugalmas kihajlásra vonatkozó képletet jogosan alkalmaztuk. E célból meghatározzuk  $\lambda$ -t, s ha  $\lambda \geq \lambda_e$ , a tervezés befejeződött. Ha  $\lambda < \lambda_e$ , akkor próbálkozó eljárással haladunk tovább: felvesszünk egy alkalmasnak látszó szelvényt és ellenőrizzük, a már megtárgyalt módszer szerint. A tervezés folyamatábrája az alábbi (78. ábra):



107.ábra

Megemlítjük, hogy a kihajlásra történő méretezésnek további módszerei is léteznek, például az ún.  $\omega$ -eljárás, mely szükségtelemé teszi a rugalmas és plasztikus mező figyelembevételét és biztonsági tényező alkalmazását.

**18. Példa**

Egy vízszintes helyzetű, I 160 jelű,  $l=4$  m hosszú acélgerenda végei be vannak falazva. Ellenőrizzük, hogy nem áll-e fenn a kihajlás veszélye, ha a gerenda hőmérséklete  $20^\circ\text{C}$ -al emelkedik! A gerenda anyagára  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ , a hőtágulási együttható  $\alpha=12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ$ , a biztonsági tényező  $n=3$ .

Megoldás.

A gerenda hő okozta kiterjedését a fal által gyakorolt – centrikusnak vehető – nyomó erők gátolják. A gátolt terjedés következtében fellépő feszültség (2.1):  $\sigma(t) = E\alpha\Delta t = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 50,4 \text{ N/mm}^2$ . A kihajlásra megengedett feszültség meghatározása végett kövessük az ellenőrzés ismertett módszerét!

$$I=1,55 \text{ cm} \quad l_r=0,5 \quad l=200 \text{ cm}, \quad \lambda = 129 > \lambda_e = 100,$$

Tehát rugalmas kihajlásról van szó.

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^5}{129^2} = 124,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{km} = \frac{\sigma_k}{n} = \frac{124,5}{3} = 41,5 \text{ N/mm}^2$$

$\sigma(t) > \sigma_{km}$ , a gerenda nem felel meg!

## **2.11. Méretezés határigénybevételre**

### A HATÁRÁLLAPOTOK MÓDSZERE

Mivel a faszerkezetek méretezésére vonatkozó szabványok nem a feszültség-összehasonlításon, azaz megengedett feszültségen alapuló méretezési módszert írják elő, szükséges röviden ismertetni a korszerűbb, igénybevétel összehasonlításán alapuló méretezési eljárást.

Magyarországon 2010 januárjától faszerkezetek méretezésére az EUROCODE 5-Faszerkezetek tervezése című szabványt kell alkalmazni, mely a határállapotok módszerén alapul.

A szerkezet határállapotának oka mindaz, ami a rendeltetésszerű használatot gátolja: törés, repedés, túlzott deformáció stb. A méretezés során azt kell igazolni, hogy a szerkezetre ható terhekből meghatározott mértékadó állapot nem kedvezőtlenebb, mint a határállapot.

Az alábbiakban – didaktikai okokból – a határállapotok módszerétől kevésbé eltérő, osztott biztonsági tényezők elvén alapuló méretezési módszert ismertetjük, melynek alapján a határállapotok módszere megérthető.

Egy szerkezet egészének teherbírását a leggyengébb elem teherbírása szabja meg, a többi elem ehhez képest túlméretezett. A helyesen kialakított szerkezet minden eleme az esetleges (hasznos) teherrel szemben azonos biztonsággal rendelkezik. A megengedett feszültségen alapuló méretezésnél az állandó teher és a hasznos teher okozta igénybevételek nincsenek szétválasztva, így az egyes szerkezeti részeknek a hasznos teherrel szembeni biztonsága különböző.

A nagyobb állandó terhelést viselő részek biztonsága nagyobb, ezért a szerkezet kialakítása nem gazdaságos.

Az osztott biztonsági tényezők elvén alapuló méretezési módszer az állandó teher bizonytalanságát egy  $k_a$  szórás tényezővel, a hasznos teher bizonytalanságát egy  $k_e$  biztonsági tényezővel veszi figyelembe, az anyag bizonytalanságát, a kivitel

pontatlanságát pedig oly módon, hogy határfeszültségnek ( $\sigma_H$ ) a folyáshatár csökkentett értékét tekinti. Fánál, ez a  $\sigma_H$  általában lényegesen különbözik a megengedett feszültségtől,  $\sigma_H > \sigma_m$ . A méretezés során az igénybevételeket. Nem pedig a feszültségeket hasonlítjuk össze.

Az egységesen Y betűvel jelölt igénybevételeket a következőképpen osztályozzuk:

$Y_a$ : az állandó teher okozta igénybevétel (önsúly, állandó jellegű teher)

$Y_e$ : az esetleges terhekből származó igénybevétel (hasznos teher, hőteher, szélteher).

A fentiekből számítható a mértékadó igénybevétel:

$$Y_M = k_a Y_a + k_e Y_e.$$

A  $k_a$  tényező 1,1 vagy 0,9 aszerint, hogy a vizsgált igénybevétel szempontjából melyik a kedvezőtlenebb.

A  $k_e$  tényező értéke 1,0~1,4 a terhelés milyenségétől függően. Az egyes szerkezeti elemek méreteit úgy kell megállapítani, hogy a határ igénybevételük ne legyen kisebb, mint mértékadó igénybevételük:

$$Y_M \leq Y_H = \sigma_H L.$$

A határ igénybevétel a határfeszültségnek ( $\sigma_H, \tau_H$ ) és egy keresztmetszet jellemzőinek (L) a szorzata. Ez utóbbi pl. keresztmetszet terület, egy nyírt idom felszíne, keresztmetszeti tényező.

A fontosabb igénybevételek esetén a tervezés és ellenőrzés képleteit az alábbiakban foglaljuk össze, Y helyett az egyes igénybevétel fajtáknál alkalmazott jelöléseket használva.

Húzás (nyomás):  $A_{sz} = \frac{N_M}{\sigma_H}, \quad N_H = A \sigma_H.$

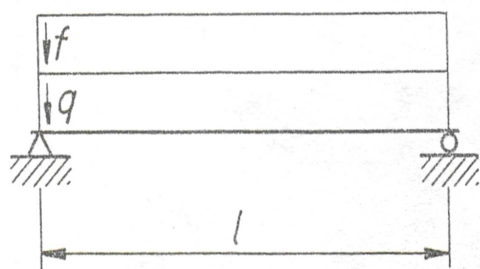
Hajlítás:  $K_{sz} = \frac{M_M}{\sigma_H}, \quad M_H = K_z \sigma_H, \quad T_H = \frac{I_z k}{S_z} \tau_H.$

Nyírás: 
$$A_{sz} = \frac{T_M}{\tau_H}, \quad T_H = A\tau_H.$$

Központosan nyomott faoszlop határereje az  $N_H = \varphi\sigma_{n_H} A_h$  képlettel számítható, ahol

- $\varphi = \frac{1}{1,1 + (\lambda/60)^2}$  : csökkentő tényező,
- $A_h$  = a hasznos keresztmetszet terület,
- $\lambda$  = a karcsúság
- $\sigma_{n_H}$  = a faanyag határfeszültsége (hajlításra, középpontos vagy külponos nyomásra).

### 19. Példa



108.ábra

A fentebb tárgyalt méretezési módszerek összehasonlítása végett számítsuk ki egy egyenletesen megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó (108. ábra) szükséges keresztmetszeti tényezőjét, a megengedett feszültségek és az osztott biztonsági tényezők módszerével!

Adatok:  $l = 8$  m, állandó teher intenzitása:  $q=200$  N/m, esetleges (hasznos) teher intenzitása:  $f=1000$  N/m. Legyen a tervezett I keresztmetszetű acélgerenda anyagának folyáshatára  $\sigma_F = 200$  N/mm<sup>2</sup>, a határfeszültség  $\sigma_H = 180$  N/mm<sup>2</sup>, a megengedett feszültség  $\sigma_m = 100$  N/mm<sup>2</sup>,  $k_a = 1,1$ ;  $k_e = 1,4$ .

A minimálisan szükséges keresztmetszeti tényező számítása a két módszer szerint a következő

$$M_{\max} = \frac{(q + f)l^2}{8} = \frac{1200 \cdot 8^2}{8}, \quad M_{\max} = 9600 \text{ Nm},$$

$$K_{sz} = \frac{M_{\max}}{\sigma_m} = \frac{960000}{10000}$$

$$\underline{\underline{K_{sz} = 96 \text{ cm}^3}}$$

$$M_a = \frac{ql^2}{8} = \frac{200 \cdot 8^2}{8} = 1600 \text{ Nm},$$

$$M_e = \frac{fl^2}{8} = \frac{1000 \cdot 8^2}{8} = 8000 \text{ Nm},$$

$$M_M = 1,1M_a + 1,4M_e = 1,1 \cdot 16000 + 1,4 \cdot 8000,$$

$$M_m = 12960 \text{ Nm},$$

$$K_{sz} = \frac{M_M}{\sigma_H} = \frac{1296000}{18000},$$

$$\underline{\underline{K_{sz} = 72 \text{ cm}^3.}}$$

Megjegyezzük, hogy a keresztmetszeti tényező számításakor Ncm, ill. N/cm<sup>2</sup> mértékegységre tértünk át.

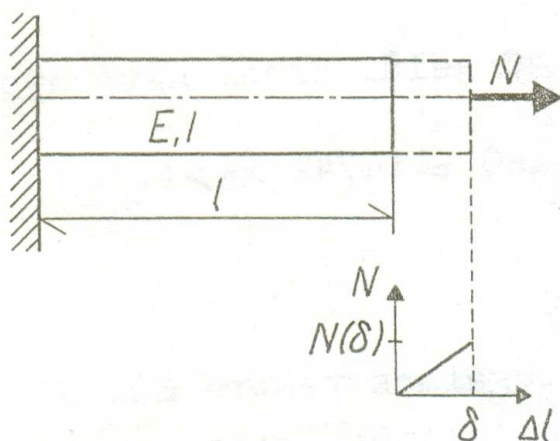
A megengedett feszültségen alapuló számítás szerint I 160 jelű acélgerenda szükséges ( $K_z=117 \text{ cm}^3$ ), az osztott biztonsági tényezőkön alapuló számítás szerint I 140 jelű. Ennek határnyomatéka:

$$M_H = K_z \sigma_H = 81,9 \cdot 180 = 14\,742 \text{ Nm} > M_M$$

## 2.12. Alakváltozási energia

A terheletlen feszültségmentes rugalmas testre működtessünk valamely egyensúlyi erőrendszert. Az erők hatására a test deformálódik, benne feszültségek ébrednek, az erők támadáspontjai elmozdulnak, s az erők a nyugalmi állapot kialakulásáig általában valamilyen  $W$  munkát végeznek. A végzett munka a testben  $U$  helyzeti energiaként tárolódik, s mivel a rugalmas testben belső súrlódás nincs,  $U=W$ . A helyzeti energiának ezt a formáját – mivel a test deformálódásával kapcsolatos – alakváltozási energiának nevezik, a testre ható külső erők munkája pedig az alakváltozási munka. Mivel e fogalmak a sztatikailag határozatlan tartók számítása során jól hasznosíthatók, áttekintjük az alakváltozási energia számítási módját a legfontosabb alap igénybevételek esetében. A következőkben mindig feltesszük, hogy a létrejövő deformációk kicsinyek, s a testre ható erőrendszer a deformáció során is egyensúlyi erőrendszer.

### HÚZÁS (NYOMÁS)



109.ábra

A húzott rúd deformálódásával kapcsolatban láttuk (2.1), hogy egy  $l$  hosszúságú,  $A$  keresztmetszet-területű rúd, melynek anyagára a rugalmassági tényező  $E$ ,  $N$  normálerő hatására a következő értékkel nyúlik (rövidül) meg (109. ábra):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad \text{A hosszúváltozás és az alkalmazott}$$

erő közti lineáris kapcsolat mindaddig fennáll, míg a rúdban ébredő feszültségek nem lépik túl az arányossági határt.



Ha a 109. ábrán látható  $l$ ,  $A$   $E$  adatokkal jellemzett rúd szabad vége a reá ható erő hatására  $\delta$  értékkel mozdul el, akkor az  $N=N(\delta)$  erő a fentiek szerint a következő

$$N(\delta) = \delta \frac{EA}{l}.$$

Számítsuk ki azt a munkát, melyet a szabad rúdvégre ható erő végez, mialatt a rúd megnyúlása 0-ról  $\delta$ -ra növekszik! Mivel az elemi elmozdulások és a hozzájuk tartozó erők szorzatának összege az elmozdulás-erő ábra által határolt háromszög területét adja, a keresett munka:

$$W = \frac{1}{2} \delta N(\delta) = \frac{1}{2} \delta \delta \frac{EA}{l} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 EA}{l}.$$

A rúdban felhalmozott energia az erővel, ill. a deformációval kifejezve a következő:

$$U = \frac{N^2 l}{2 EA}, \quad \text{ill.} \quad U = \frac{\delta^2 EA}{2 l}.$$

Az energia a rúdban ébredő feszültséggel kifejezve pedig:

$$U = \frac{\sigma^2 l A}{2E}.$$

A rúd térfogategységre jutó energia:  $U = \frac{\sigma^2}{2E}$ .

Ha  $\sigma$  helyébe a rúd anyagának rugalmassági határát helyettesítjük, a tárolható energia maximumát kapjuk.

Ha a húzó erő a rúd szelvényeiben a koordináta függvénye, azaz  $N=N(x)$ , akkor az elemi rúdszakaszokban felhalmozott energiákat kell összegezni. Egy  $dx$

hosszúságú rúdszeletben az energia:  $dU = \frac{N^2(x)}{2EA} dx$ , az  $l$  hosszúságú rúdban

tárolt energia tehát:

$$U = \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA} dx.$$

## HAJLÍTÁS

Egy  $l$  hosszúságú,  $I_z$  másodrendű nyomatékú rúd szabad végének szelvénye  $M$  hajlító nyomatékú erőpár hatására  $\varphi = \frac{Ml}{I_z E}$  szöggel fordul el. Mivel  $\varphi$  egyenesen arányos  $M$ -mel, ugyanolyan meg gondolással, mint a húzott rúdban felhalmozott energia esetén:  $U = \frac{M\varphi}{2}$ . A nyomaték és a deformáció függvényében

$$U = \frac{M^2 l}{2EI_z}, \quad \text{ill.} \quad U = \frac{\varphi^2 EI_z}{2l}$$

Ha a hajlító nyomaték a rúd szelvényében változik, azaz  $M=M(X)$ , akkor az alakváltozási energiát az elemi rúdszakaszokban felhalmozott energiák integrálásával nyerjük:

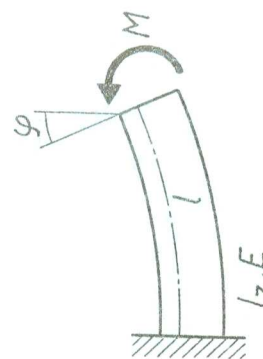
$$U = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{2EI_z}$$

Megjegyezzük, hogy az imént nem vettük figyelembe a hajlított rúdban a nyírás következtében felhalmozott energiát.

## CSAVARÁS

A kör és körgyűrű keresztmetszetű rudat terhelő csavaró nyomaték és a végkeresztmetszetek elcsavarodási szöge közti kapcsolat – mint láttuk – lineáris:

$\varphi = \frac{M_{cs} l}{I_p G}$ . A húzásnál és hajlításnál látott utat követve érthető, hogy egy  $l$



**110.ábra**

hosszúságú,  $I_p$  poláros másodrendű nyomatékú rúd esetében, ha az anyag nyíró rugalmassági modulusa  $G$ , az  $M_{cs}$  csavaró nyomaték hatására felhalmozódó alakváltozási energia:

$$U = \frac{M_{cs}^2 l}{2GI_p}, \quad \text{ill.} \quad U = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l},$$

Ahol  $\varphi$  a végkeresztmetszetek elcsavarodási szöge.

Ha  $M_{cs} = M_{cs}(x)$ , vagyis a csavaró nyomaték a szelvény koordinátájának függvénye, az energia a korábbiakhoz hasonlóan

$$U = \int_0^l \frac{M_{cs}^2(x) dx}{2GI_p}$$

A nyírás következtében felhalmozódó alakváltozási energia a legtöbb esetben elenyésző a többi alap igénybevételből számítható energiához képest, ezért nem is foglalkozunk vele. Megmutatható, hogy összetett igénybevétel esetén a felhalmozott energia az alap igénybevételek következtében felhalmozódó energiák algebrai összegezésével számítható: tehát – ha a nyírás okozta energiát elhanyagoljuk – az  $N$ ,  $M_h$ ,  $M_{cs}$  igénybevételek esetén

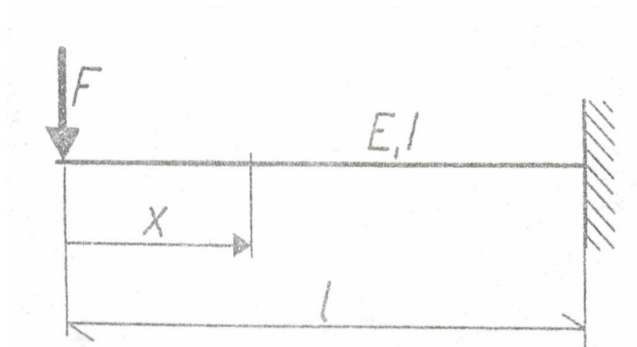
$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2(x) dx}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{M_h^2(x) dx}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{M_{cs}^2(x) dx}{GI_p}$$

### CASTIGLIANO TÉTELE

Az alakváltozási munka és a felhalmozott alakváltozási energia egyenlőségét kifejező  $W=U$  összefüggés gyakran felhasználható deformációk meghatározására. Ha például 111. ábrán látható  $l$ ,  $I$ ,  $E$  adatokkal jellemzett  $F$  erővel terhelt konzoltartó szabad végének elmozdulását akarjuk meghatározni, így járhatunk el. A rúdban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Fx)^2 dx = \frac{1}{2EI} \frac{F^2 l^3}{3}$$

Az erőnek a deformálódás során végzett munkája:



111.ábra

$$W = \frac{1}{2} F \delta.$$

A munka és az energia egyelőségéből:

$$\frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2EI} \frac{F^2 l^3}{3}, \quad \delta = \underline{\underline{\frac{Fl^3}{3EI}}}.$$

Egy  $N$  erővel húzott prizmatikus rúd megnyúlása – a szokásos jelölésekkel –

$\Delta l = \delta = \frac{Nl}{EA}$ . Ugyanezen rúdban a felhalmozott energia:  $U = \frac{N^2 l}{2EA}$ . Az energia

általában folytonos, sőt differenciálható függvénye  $N$ -nek, beszélhetünk az energia

$N$ -szerinti parciális deriváltjáról:  $\frac{\partial U}{\partial N} = \frac{Nl}{EA}$ . Meglepő módon, ez a derivált

egyenlő az  $N$  erő által létrehozott deformációval. Nem véletlen egyezésről van szó, hanem egy általánosan érvényes tétel teljesüléséről.

Tétel (Castigliano tétele): Ha egy  $F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, M_2, \dots, M_m$  koncentrált erőkből, ill. erópárokából álló egyensúlyi erőrendszerrel terhelt test

anyaga követi a HOOKE-törvényt,

a reakciók a test deformálódása során nem végeznek munkát,

az erőhatások és a deformációk között lineáris kapcsolat áll fenn, akkor

az egyensúlyban lévő test valamelyik erőtől megtámadott pontjának elmozdulása a támadó erő irányában az alakváltozási energiának az erő szerint vett parciális deriváltjával egyenlő:

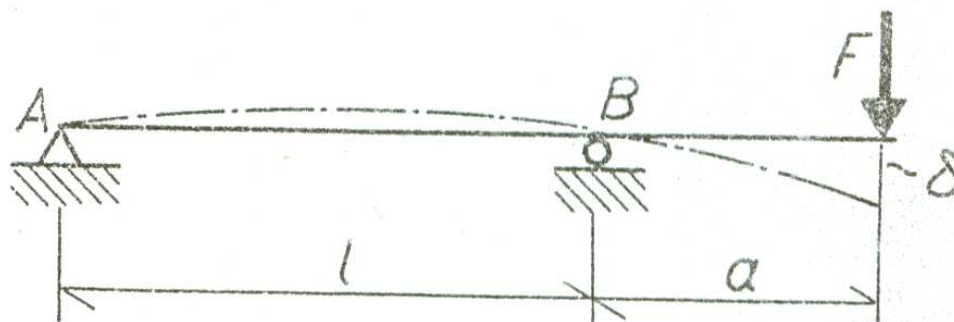
$$\delta_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1}, \text{ továbbá}$$

Az egyensúlyban levő test valamely (koncentrált) erőpárral támadott helyén az elfordulás szöge az erőpár síkjában az alakváltozási energiának a nyomaték szerinti parciális deriváltjával egyenlő:

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}.$$

A tétel alkalmazását példán szemléltetjük.

Határozzuk meg a 112. ábrán látható  $l$ ,  $a$ ,  $I$ ,  $E$  adatokkal jellemzett tartó szabad végének elmozdulását.



112.ábra

Megoldás. A tartó pontján működő reakció erő  $\frac{a}{l}F$ , így a tartóban felhalmozott energia:

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^l \left(-\frac{a}{l}Fx\right)^2 dx + \int_0^a (-Fx)^2 dx \right] = \frac{1}{2EI} \left( \frac{a^2}{l^2} F^2 \frac{l^3}{3} + F^2 \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a^2 F^2}{6EI} (l + a).$$

A tartó C pontjának elmozdulása:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{a^2 F}{3EI} (l + a).$$

Megjegyezzük, hogy a számítás egyszerűbbé tehető egy tétel felhasználásával, mely a differenciálásnak az integráljel mögötti elvégzését teszi lehetővé:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} dx$$

Példánkban az első integrálnál  $\frac{\partial M}{\partial F} = -\frac{a}{l}x$ , a másodikban  $\frac{\partial M}{\partial F} = -x$ , így a

keresett elmozdulás:

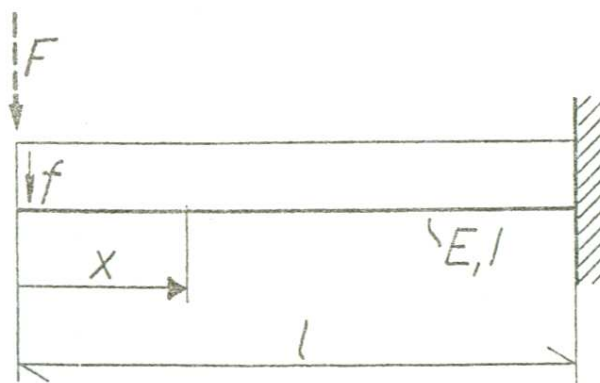
$$\delta = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^1 \left( -\frac{a}{l}Fx \right) \left( -\frac{a}{l}x \right) dx + \int_0^a (-Fx)(-x) dx \right] = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^1 \frac{a^2}{l^2} Fx^2 dx + \int_0^a Fx^2 dx \right]$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left( \frac{a^2}{l^2} F \frac{l^3}{3} + F \frac{a^3}{3} \right), \quad \delta = \frac{a^2 F}{3EI} (1 + a).$$

## 20. Példa

Számítsuk ki a 113. ábrán látható, egyenletesen megoszló terheléssel ellátott tartó szabad végének lehajlását!

A CASTINGLIANO-tétel alkalmazhatósága végett működtessünk a szabad



113.ábra

végén egy F erőt. Az f és F terhelések együttes hatására bekövetkezett elmozdulás:

$$\delta = \int_0^1 M \frac{\partial M_h}{\partial F} dx, \text{ ahol } M_h = -Fx - f \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\partial M_h}{\partial F} = -x.$$

Az  $f$  és  $F$  terhelés hatására bekövetkező elmozdulás:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^1 (-Fx - f \frac{x^2}{2})(-x) dx = \frac{1}{EI} \left( F \frac{x^3}{3} + f \frac{x^4}{8} \right)_0^1.$$

A keresett elmozdulást  $F \rightarrow 0$  határátmenettel nyerjük:

$$\underline{\underline{\delta = \frac{f l^4}{8EI}}}$$

Hasonló módon számíthatnánk a szabad vég elfordulását: a tényleges terhelésen kívül működtetni kellene az  $x=0$  szelvényben egy  $M$  erőpárt, az elfordulási szöveget

$$\frac{\partial U}{\partial M} \text{ adná, midőn a deriváltban } M \rightarrow 0.$$

### 2.13. Határozatlan tartók

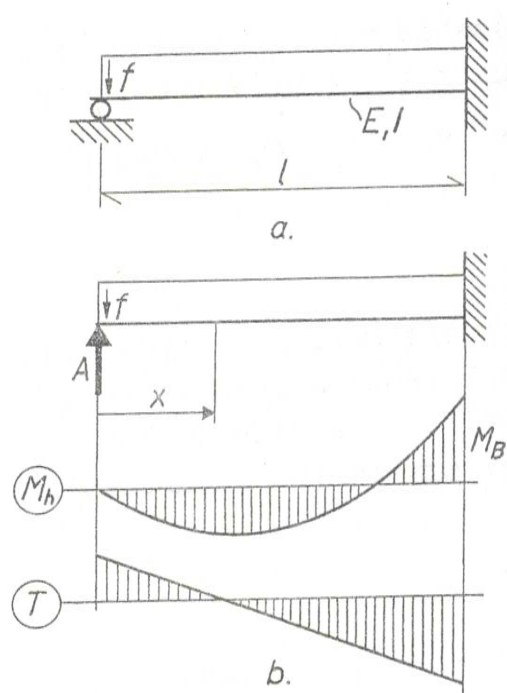
A műszakilag nagy jelentőségű, sztatikailag határozatlan tartók számítási módszereivel nem foglalkozunk részletesen, csupán azt mutatjuk meg, hogy a rendelkezésre álló eszközök birtokában miképpen határozhatjuk meg egyszerűbb határozatlan tartók reakcióit.

### CASTIGLIANO TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA

A tétel előnyösen alkalmazható sztatikailag határozatlan feladatok megoldására is. A megoldás menete a következő: a szerkezet reakciói közül annyit sorolunk az aktív erők (erőpárok) közé, hogy a szerkezet sztatikailag éppen határozottá váljon. Jelöljük az aktív erők (erőpárok) közé sorolt reakciókat  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ...-vel. Ezek sztatikailag határozatlan mennyiségek – éppen úgy, mint a meghagyott reakciók –

a szerkezet elmozdulását, elfordulását akadályozzák meg, tehát ha a szerkezet alakváltozási energiáját e határozatlan mennyiségek szerint deriváljuk, zérust kell kapnunk:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0 \dots$$



114.ábra

sztatikailag határozatlan tartó reakcióit.

Adatok:  $l, E, I, f$ .

A támasznál működő reakciót tekintjük sztatikailag határozatlan mennyiségnek, s írjuk fel a tartó alakváltozási energiáját és deriváljuk A szerint:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \int_0^l \frac{M_h}{EI} \frac{\partial M_h}{\partial A} dx, \quad \text{ahol} \quad M_h = Ax - f \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\partial M_h}{\partial A} = x. \quad \text{Ekkor}$$

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left( Ax - f \frac{x^2}{2} \right) x dx = 0$$

Ha az aktív erőket állandónak vesszük, a szerkezet energiája csak az  $X, Y, Z \dots$  határozatlan mennyiségek függvénye. Az  $U = U(X, Y, Z, \dots)$  többváltozós függvény minimumának szükséges feltétele, hogy a fenti deriváltak zérusok legyenek. Megállapíthatjuk tehát, hogy a szerkezet határozatlannak tekintett megfogásain olyan reakciók ébrednek, melyek az adott aktív erőrendszer esetében a legkisebb alakváltozási energiát biztosítják.

A fentiekben kifejtett módszert példán illusztráljuk.

Határozzuk meg a 114/a. ábrán látható,



$$\frac{1}{EI} \left( A \frac{l^3}{3} - f \frac{l^4}{8} \right) = 0, \quad \underline{\underline{A = \frac{3fl}{8}}}$$

A falnál ébredő reakciók már könnyen számíthatók:

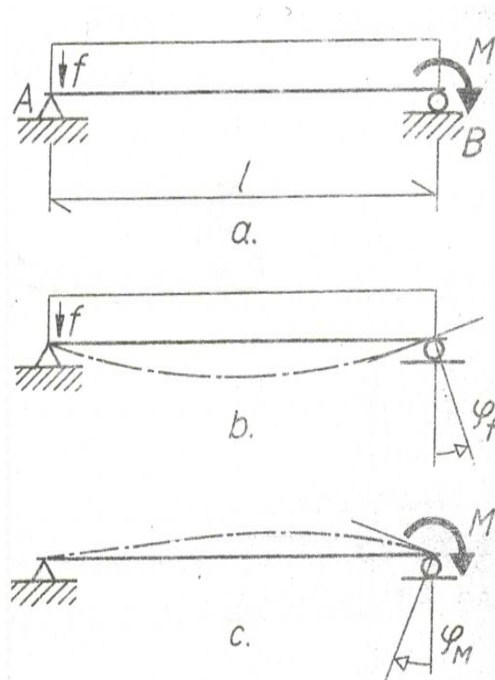
$$\underline{\underline{B = \frac{5}{8} fl}}, \quad \underline{\underline{M_B = \frac{-fl^2}{8}}}$$

Az igénybevételi ábrákat a 114/b. ábrarészlet szemlélteti.

### A TÖRZSTARTÓ MÓDSZERE

Ezt a módszert – legegyszerűbb formájában – az imént tárgyalt feladatra alkalmazva mutatjuk be.

Az eljárás a következő lépésekből áll:



**115.ábra**

pontnál előálló deformáció (115/b. ábra):

A sztatikai szempontból fölös kényszert (ill. kényszereket) külső erőkkel, ill. erőpárokkal helyettesítve, a tartót sztatikailag határozottá tesszük. Az így nyert tartó az eredeti tartó törzstartója.

A fölös kényszerek helyettesítése többféleképpen történhet, példánkban a befogást, mint kényszert, egy fix csuklóval és egy  $M_B$  erőpárral helyettesítjük (115/a. ábra).

Meghatározzuk a helyettesítő erők, ill. erőpárokkal kapcsolatos deformáció elemeket.

Példánkban az  $f$  terhelés hatására a B

$$\varphi_f = -\frac{f l^3}{24EI},$$

az  $M_B$  erőpár okozta deformáció pedig:

$$\varphi_M = \frac{M_B l}{3EI}.$$

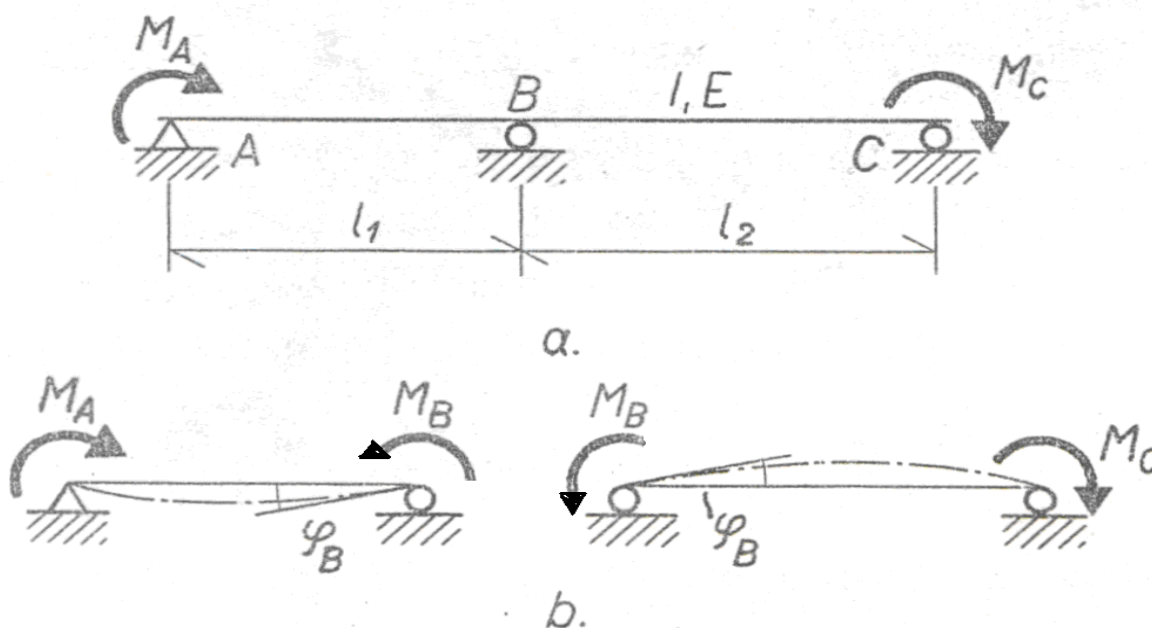
A fölös kényszereket helyettesítő reakciókomponensek azok lesznek, amelyek a törzstartón ugyanolyan rugalmas vonalat eredményeznek, mint az eredeti, sztatikailag határozatlan tartóé. Az eredeti tartó deformáció elemeit a reakciókomponensekkel kifejezve, a helyettesítő erők, ill. erőpárok keresett értékeit kapjuk. Példánkban az eredeti tartó B szelvénye nem fordul el, tehát  $\varphi_B = 0$ .

$$\text{Mivel } \varphi_B = \varphi_f + \varphi_M = -\frac{f l^3}{24EI} + \frac{M_B l}{3EI} = 0, \quad \underline{\underline{M_B = \frac{f l^2}{8}}},$$

megegyezően a korábban nyert eredménnyel.

### CLAPEYRON-EGYENLET

Többtámaszú tartók számításánál előnyös az a felismerés, hogy három szomszédos támasz feletti hajlító nyomatékok között meghatározott kapcsolat áll fenn. Egy nagyon egyszerű esetben ilyen kapcsolatot az eddigiek alapján mi is megállapítottunk.



116.ábra

Megjegyezzük, hogy  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$  hajlító nyomatékok, melyekre a szokásos előjelszabályok érvényesek. A  $\varphi_B$  két kifejezést egyenlővé téve, a következő egyenletet kapjuk:

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 = 0,$$

amelyből  $M_B$  meghatározható.

Ha a tartón egyéb terhelés is van, az egyenlet így alakul:

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 = -\frac{6M_b}{l_1} - 6\frac{M_j}{l_2}.$$

A jobb oldali  $M_b$ ,  $M_j$  mennyiségek a bal, ill. jobb oldali törzstartó nyomatékábrájának sztatikai nyomatékát jelentik az A, ill. C pont függőlegesére.

A  $-\frac{6M_b}{l_1}$ , ill.  $-\frac{6M_j}{l_2}$  ún. terhelési állandók értéke táblázatokban található.

A CLAPEYRON-egyenlet alkalmazásának megértése végett határozzuk meg a 117/a. ábrán látható, háromtámaszú tartó reakcióit és állítsuk elő az igénybevételi ábrákat!

Adatok:  $l$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $f$ .

Megoldás.

$M_A = M_C = 0$  miatt a CLAPEYRON-egyenlet most így fest:

$$2M_B 2l = -\frac{6M_b}{1} - \frac{6M_j}{1}.$$

A terhelési állandók számítása a 117/b. ábra alapján a következő:

$M_b = 1 \frac{fl^2}{8} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$  (a parabolaszület területe a befoglaló téglalapnak

$$\frac{2}{3} - a), \quad \frac{-6M_b}{1} = -\frac{fl^3}{4}.$$

Most már számítható  $M_B$ :

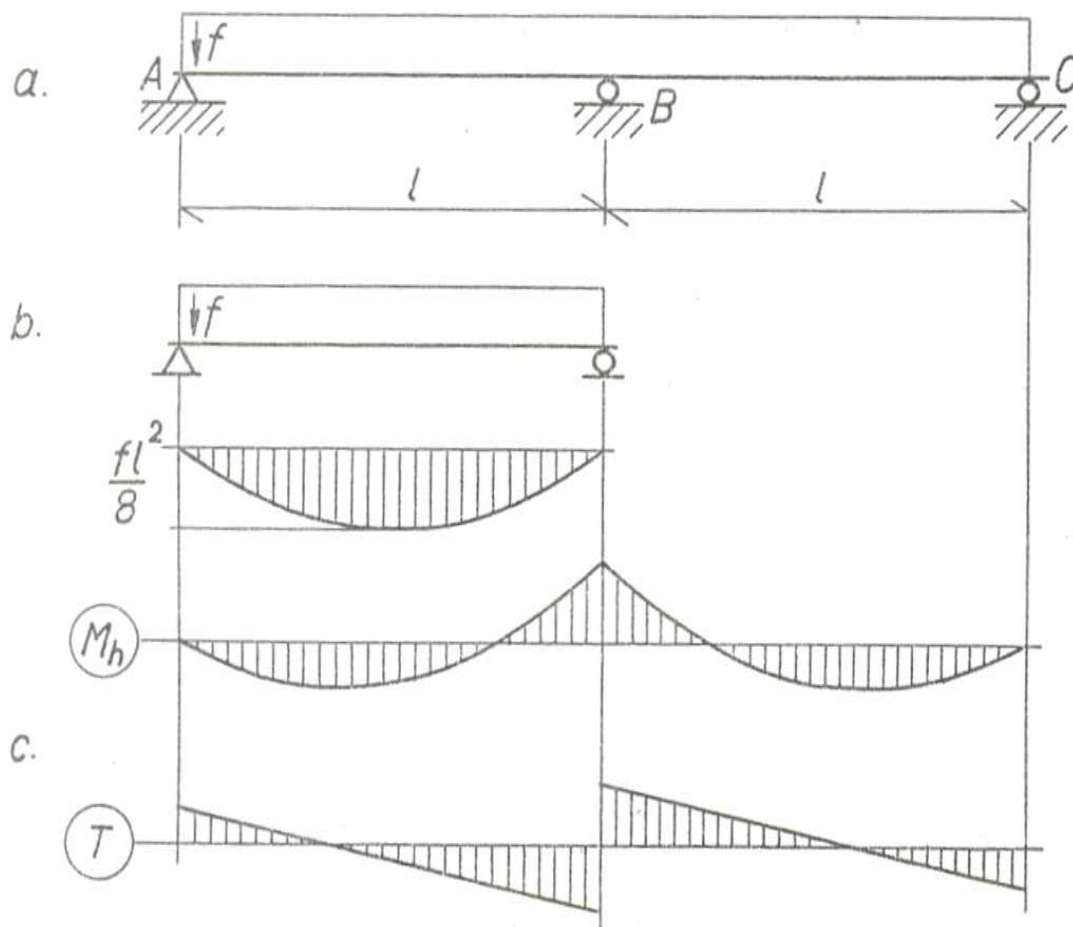
$$4M_B l = 2\left(-\frac{fl^3}{4}\right), \quad \underline{\underline{M_B = -\frac{fl^2}{8}}}$$

Az A reakció számítása úgy történhet, hogy a már ismert  $M_B$ -t kifejezzük a bal oldali erők nyomatékösszegével is:

$$M_B = -\frac{fl^2}{8} = Al - \frac{fl^2}{2}, \quad \underline{\underline{A = \frac{3}{8}fl}}, \text{ a szimmetria miatt}$$

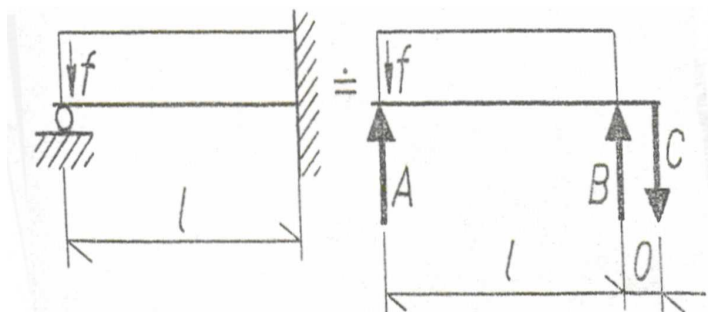
$$\underline{\underline{C = \frac{3}{8}fl}}, \quad \sum F_{iy} = 0 - \text{ból} \quad \underline{\underline{B = \frac{5}{4}fl}}$$

Az igénybevételi ábrák szerkesztése a 117/c. ábrarészletről leolvasható.



117.ábra

## 21. Példa



118.ábra

Oldjuk meg a 114. ábrával kapcsolatban ismertett feladatot a CLAPEYRON-egyenlettel!

A befogást két, egymáshoz végtelen közeli, párhuzamos

erővel helyettesítjük (118. ábra). Most tehát  $l_1=l$ ,  $l_2=0$ ,  $M_A=0$ ,  $M_C=0$ ,

$\frac{-6M_j}{l_2}=0$ . A  $\frac{-6M_b}{l_1}$  mennyiséget most táblázatból vesszük:

$$\frac{-6M_b}{l_1} = -\frac{fl^3}{4}.$$

A CLAPEYRON-egyenlet:

$$2M_B l = \frac{-fl^3}{4}, \quad \underline{\underline{M_B = -\frac{fl^2}{8}}}.$$

Az A reakció számítása  $M_B$  ismeretében:

$$A_1 f \frac{l^2}{2} = -\frac{fl^2}{8}, \quad \underline{\underline{A = \frac{3fl}{8}}}.$$

A B reakció:  $A-fl+B=0$ ,  $\underline{\underline{B = \frac{-5}{8} fl}}.$

Érdekes, hogy a tartó a szükséges keresztmetszeti méretek szempontjából nem előnyösebb egy ugyanilyen támaszközű egyszerű kéttámaszú tartónál. Ugyanis

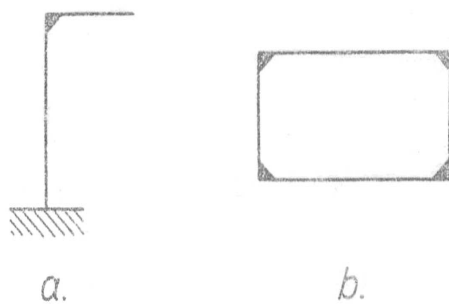
$$\text{mindkét esetben } |M|_{\max} = f \frac{l^2}{8}.$$

## 2.14. Keretszerkezetek, lemezek

### **KERETSZERKEZETEK**

A keretszerkezetek egymással mereven kapcsolódó rudakból épülnek fel. A merev kapcsolat következtében a kapcsolódás helyén, a csomópontokban, a rudak által bezárt szögek a terhelés után is változatlanok. A merev csomópont az egyik rúdról a másikra nem csak erőt, hanem nyomatékot is közvetíthet. A továbbiakban egyenes tengelyű rudakból álló keretszerkezetekkel foglalkozunk, feltesszük, hogy a rúdtengelyek egy síkban vannak, azaz síkbeli keretszerkezetről van szó.

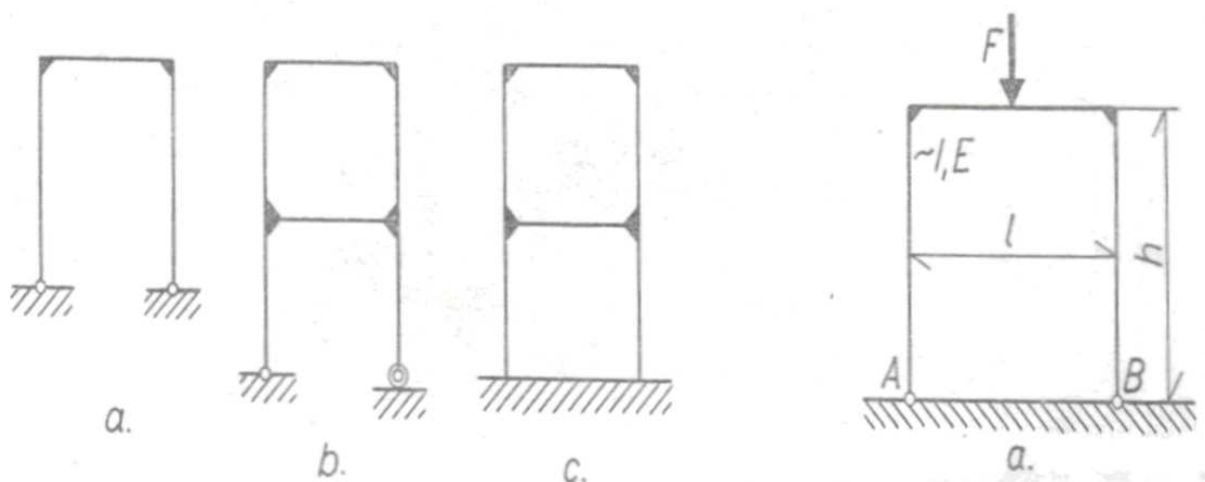
A nyitott keretszerkezet (119/a. ábra) rúdjai nem képeznek zárt sokszöget, ellentétben a zárt keretszerkezettel (119/b. ábra).



**119.ábra**

A keretszerkezet sztatikailag határozatlan, ha a megfogásoknál fellépő ismeretlen reakciókomponensek száma több, mint a rendelkezésünkre álló sztatikai egyensúlyi egyenleteké. A sztatikai

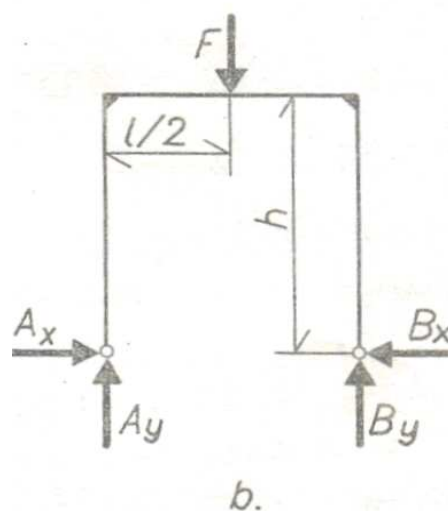
határozatlanság fokszáma a fölös számú kényszerek által jellemzett reakciókomponensek száma. A szerkezet lehet külsőleg, (120/a. ábra), belsőleg (120/b. ábra), vegyesen (120/c. ábra), sztatikailag határozatlan (91. ábra). A keretszerkezetek számításának részleteivel nem foglalkozunk, a leggyakrabban előforduló keret- és szerkezet típusok esetében a reakciókomponensek és az igénybevételi ábrák műszaki táblázatokban rendelkezésre állnak.



120.ábra

Megmutatjuk azonban, hogy a legfontosabb keretszerkezet-típus, a kétcsuklós keret, a rendelkezésünkre álló eszközökkel miként vizsgálható.

Példaként vegyük a 121. ábrán látható kétcsuklós, nyitott keretszerkezetet, melyet egyetlen koncentrált erő terhel. A reakciókomponensek száma 4, a szerkezet sztatikailag egyszerűen határozatlan. A szimmetriából következőleg



121.ábra

$$A_y = B_y = \frac{F}{2}, \quad A_x = -B_x.$$

Az ismeretlen  $A_x$  komponenst abból a feltételből határozzuk meg, hogy az A csomópont nem mozdul el, tehát ha a szerkezet hajlításából származó energiáját  $A_x$ -szerint deriváljuk, zérust kell kapni.

$$\delta_A = 2 \left[ \frac{1}{EI} \int_0^h (-A_x x)^2 dx + \int_0^{l/2} \left( \frac{F}{2} x - A_x h \right)^2 dx \right] = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial A_x} = -x \quad \frac{\partial M}{\partial A_x} = -h$$

$$\int_0^h (-A_x x)(-x) dx + \int_0^{1/2} \left(\frac{F}{2} x - A_x h\right)(-h) dx = 0$$

$$A_x \frac{h^3}{3} + -\frac{Fh}{2} \frac{l^2}{4.2} + A_x h^2 \frac{1}{2} = 0, \quad \underline{\underline{A_x = \frac{3l^2}{8(2h^2 + 3lh)} F.}}$$

## **LEMEZEK**

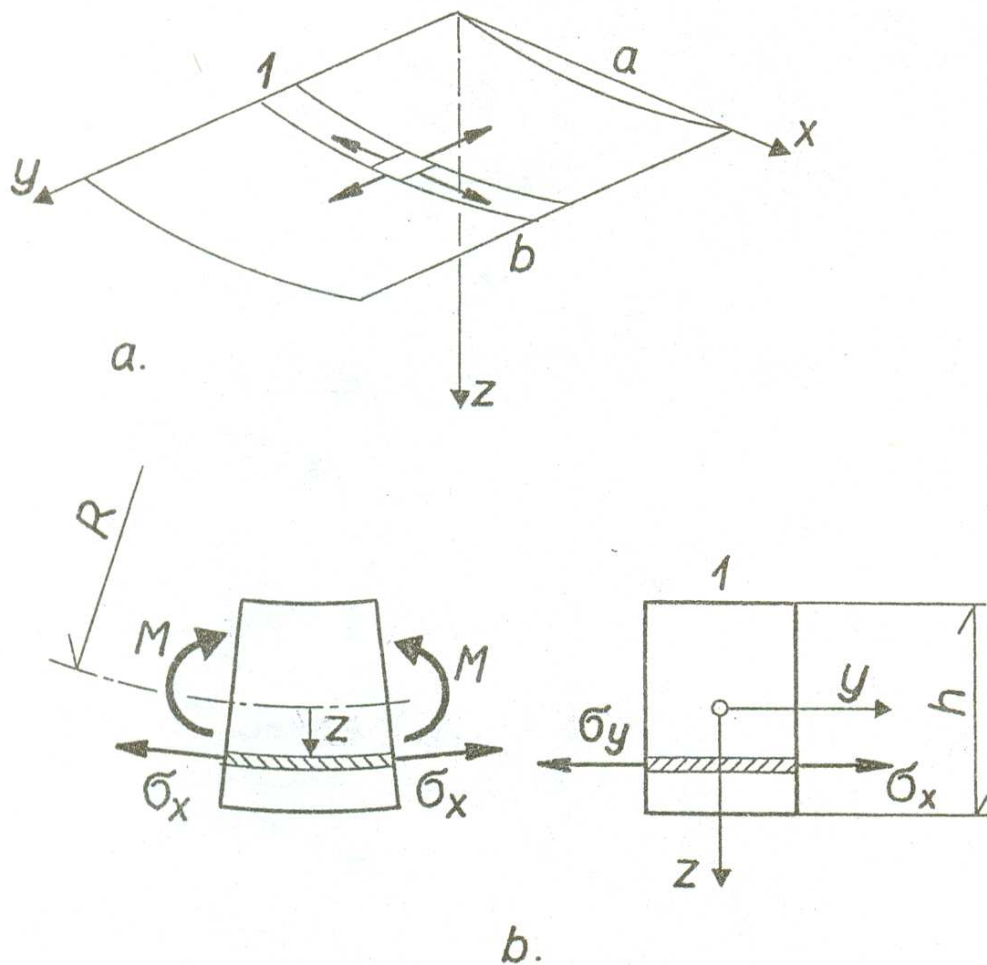
A lemez olyan test, melyet két, egymáshoz közel fekvő, rendszerint párhuzamos sík határol.

A következőkben feltesszük, hogy a lemez vékony, azaz a vastagsága a lemezsíkba eső méretekhez képest kicsiny, továbbá a lemez lehajlása is kicsiny. Az ilyen feltételeknek eleget tevő lemezek a faiparban is nagy jelentőségűek.

Az alábbiakban csupán a lemezekben és a rudakban kialakuló feszültségállapot, valamint a deformálódás különbözőségére fogunk rámutatni.

Legyen egy téglalap alakú lemez terhelése a lemez síkjára merőleges (122. ábra). Az ilyen lemez egy részének deformált alakja – feltéve, hogy a végektől elég távoli részéről van szó – olyan hengerfelületnek tekinthető, melynek alkotói a lemez hosszabbik oldalával párhuzamosak. Vizsgáljuk meg e hengerfelület egységnyi széles sávját, melyet az alkotókra merőleges síkok vágnak ki a felületből! Feltevéseinket a következő megállapításokkal egészítjük ki:





122.ábra

- a lemez középsíkja a hajlítás során semleges réteg marad (nem szenved deformálódást),
- a lemezsáv keresztmetszetei a hajlítás után is síkok maradnak,
- a középsíkra merőleges feszültségek elhanyagolhatóak.

Legyen a lemez vastagsága  $h$ , a semleges réteg görbületi sugara  $R$ , a vizsgált helyen a hajlító nyomaték  $M$ .

A lemezsáv vonalkázott részén (122/b. ábra) ekkor  $\sigma_x$  és  $\sigma_y$  feszültségek ébrednek.

A prizmatikus rúdnál látottakhoz képest figyelemre méltó, hogy most  $y$  irányú feszültségekkel is számolni kell, melyek a lemezsáv  $y$  irányú deformálódását gátolják.

Ugyanolyan megfontolásokkal, mint korábban a tiszta hajlítás tárgyalásánál, belátható, hogy a vonalkázott rész fajlagos hosszváltozása  $\varepsilon_x = \frac{z}{R}$ , s mivel y irányú deformálódás nincs,  $\varepsilon_y = 0$ .

A megfelelő feszültségeket a HOOKE-törvény segítségével kapjuk (1.6.)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \sigma_y = \mu\sigma_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{z}{R} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu^2\sigma_x),$$

$\sigma_x = \frac{zE}{R(1-\mu^2)}$ ,  $\sigma_y = \frac{\mu zE}{R(1-\mu^2)}$ .  $\sigma_x$  és  $\sigma_y$  tehát lineáris függvénye z-nek.

A lemezsávot terhelő hajlító nyomatékot így számíthatjuk:

$$M_h = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \frac{E}{(1-\mu^2)R} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R}, \quad \text{melyből}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M_h}{D}, \quad \text{ahol} \quad \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Ez a D mennyiség a lemez hajlító merevsége, mely a rudaknál szereplő EI mennyiségnek felel meg.

Hasonlítsuk össze a rúd és a lemez görbületi viszonyait! Ha a lemezsávot magában álló rúdként tekintjük, görbület:

$$g_r = \frac{1}{R_r} = \frac{M_h}{EI} = \frac{12M_h}{Eh^3}.$$

A lemezsáv tényleges görbület:

$$g_l = \frac{1}{R} = \frac{M_h}{D} = \frac{12M_h(1-\mu^2)}{Eh^3}.$$

A két görbület aránya:  $\frac{g_r}{g} = \frac{1}{1-\mu^2}$ .

Amint látható, a lemez merevsége nagyobb, mint a rúdé.

Kis lehajlások esetén  $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2z}{dx^2}$  s így az elemi sáv rugalmas vonalának differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_h}{D}.$$

A lemez deformálódásának vizsgálata ennek a differenciál egyenletnek az integrálására vezethető vissza.