NYUGAT-MAGYARORSZÁGI EGYETEM
Faipari Mérnöki Kar

Műszaki Mechanika és
Tartószerkezetek Intézet

Dr. Hajdu Endre
egyetemi docens

MŰSZAKI MECHANIKA III.

KINEMATIKA ÉS KINETIKA

**Jegyzet a faipari-, ipari termék és formatervező,
papíripari és mechatronika mérnök
MSC hallgatók számára**

**S o p r o n
2 0 0 9**

Tartalomjegyzék

KINEMATIKA ÉS KINETIKA

3.1. Mozgásfüggvény

BEVEZETÉS

A kinematika a mechanikai mozgás térbeli és időbeli lefolyását vizsgálja, lényegében geometriai szempontból, függetlenül a mozgást előidéző októl. A kinetika a mozgást befolyásoló okokat tárja fel. E két tudományág nem választható el egymástól élesen. Ez a jegyzet a kinematikát és a kinetikát együtt tárgyalja.

Valamely test térben és időben végbemenő mozgásának leírásához mindig valamilyen vonatkoztatási rendszert – egy másik testhez kötött koordináta –rendszert – kell felvenni. Vonatkoztatási rendszer nélkül a test mozgásáról semmit sem mondhatunk. Természetesen a vizsgált mozgás függ a választott koordináta-rendszertől, vagyis a mozgás mindig relatív, egy bizonyos vonatkoztatási rendszerhez viszonyított. A mechanika néhány alaptételre, a Newton-axiómákra épül. Ezek az alaptételek csak meghatározott módon választott koordináta-rendszerekben érvényesek. Pusztán kinematikai vizsgálatok céljából azonban más koordináta-rendszereket is alkalmazhatunk. A kinematikai és kinetikai mennyiségek – például a koordináták, erők – méréséhez mértékrendszert kell választani. A továbbiakban kizárólag a nemzetközi mértékrendszert (SI) alkalmazzuk, melynek használatát a magyar szabványok (MSZ4900) kötelezően előírják. A nemzetközi mértékegységrendszer mechanikai alapegységei: a méter (m), a másodperc (s) és a kilogramm (kg). Egy test mozgásának vizsgálatánál ismerni kell valamelyik pontjának – például súlypontjának – mozgását, továbbá az egész testnek a kiszemelt pont körül végzett mozgását. Előfordulhat, hogy az utóbbi mozgás hiányzik, vagy valamilyen szempontból elhanyagolható. Ilyenkor az egész test helyett egy tömegpontnak nevezett modellel dolgozhatunk. Vagyis kinematikai szempontból csupán a kiszemelt pont mozgását vesszük figyelembe, kinetikai szempontból pedig az egész test tömegét. Hogy mikor engedhető meg a valóság ilyen modellel történő helyettesítése, azt esetenként kell eldönteni.

Mivel a fent leírt egyszerű modell nagyon sok esetben használható, részletesebben foglalkozunk a tömegpont kinematikájával és kinetikájával.

ALAPFOGALMAK, MOZGÁSFÜGGVÉNY

A vonatkoztatási rendszer felvétele után beszélhetünk a tömegpont helyzetéről: koordinátáinak összességéről, s a tömegpont mozgásáról: helyzetének megváltoztatásáról.

A vonatkoztatási rendszer gyakran térbeli derékszögű koordináta rendszer.

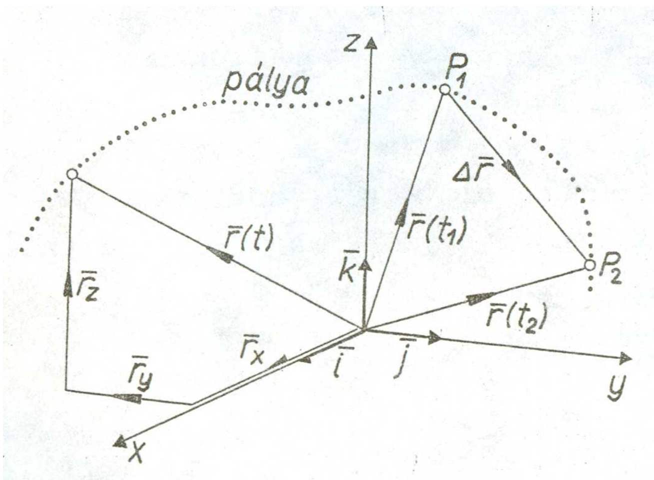
A mozgás leírása azt jelenti, hogy megadjuk azokat a helyeket, ahol a tömegpont a szóba jövő időpontokban tartózkodik.

Az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

Paraméteres egyenletrendszer minden t időpontban megadja tömegpont helyzetét.
Tömörebb jelölésmódot alkalmazva azt is mondhatjuk, hogy a mozgást az

$\bar{r} = \bar{r}(t)$ (m)

Vektor-skalár függvény írja le. Ez a függvény a t paraméter minden szóba jövő értékéhez egy olyan vektort rendel, melynek kezdőpontja a koordináta rendszer kezdőpontja, végpontja a mozgó pont (123. ábra). Az $\bar{r}(t)$ vektor a tömegpont helyvektora. A helyvektorok végpontjának összessége a mozgó pont által leírt pálya. Az $\bar{r} = \bar{r}(t)$ függvény neve: mozgásfüggvény. Ez a függvény tapasztalatunk szerint egyértékű és folytonos.

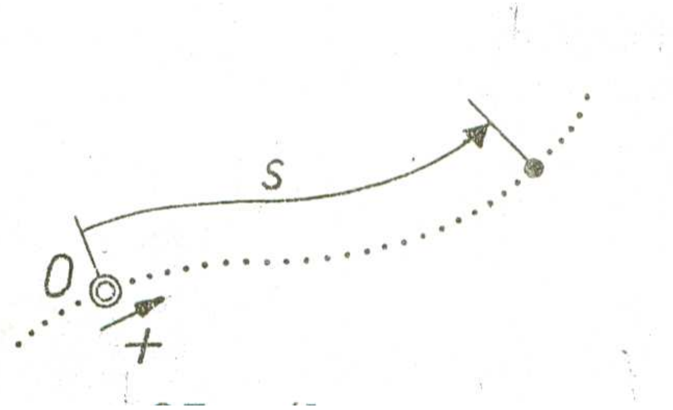


123.ábra

A helyvektor felbontható a koordináta tengelyekkel párhuzamos összetevőkre:

$$\bar{r} = \bar{r}_x + \bar{r}_y + \bar{r}_z = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

ahol az x = x(t), y = y(t), z = z(t) komponensek az idő függvényei, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ a vonatkoztatási rendszer alapvektorai. A tömegpont $\Delta t = t_2 - t_1$ intervallumban történő elmozdulása a $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1)$ vektor. Ha a tömegpont valamilyen adott görbén mozog, akkor a mozgás leírása a következőképpen történhet: a pályagörbén megadunk egy irányítást (ezen azt értjük, hogy megadunk egy haladási irányt) és kijelölünk egy 0 kezdőpontot. Ezután a tömegpont helyzetét minden pillanatban meghatározza egyetlen adat, az 0-tól a tömegpontig mért előjeles ívhossz (124. ábra). Az s előjeles ívhossz neve: ívkoordináta. Most tehát a mozgást a pálya befutásának törvénye, az s = s(t) (m) függvény írja le.



124.ábra

Egy derékszögű koordináta rendszer valamelyik tengelyén mozgó tömegpont esetén ívkoordinátául a tömegpont megfelelő koordinátáját választjuk.
Ha a tömegpont t_1, t_2, időközben egy pályaszakasz minden pontján csak egyszer halad át, akkor az adott időközben megtett út a pályaszakasz hossza.

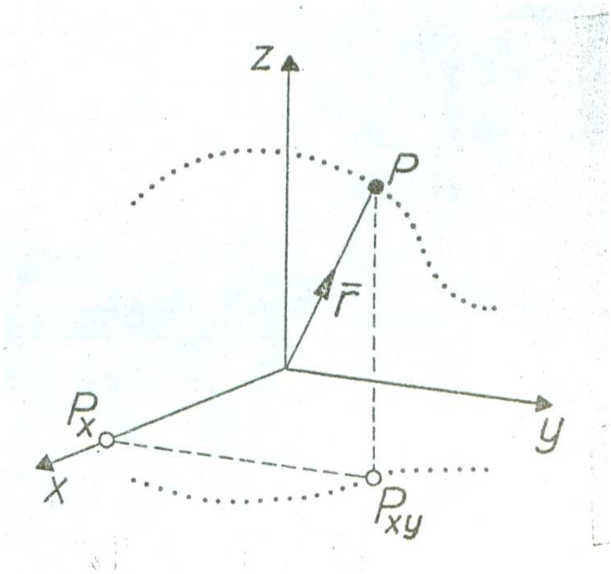
A térben mozgó tömegpont egy síkra vagy egy egyenesre vonatkozó vetületének mozgását az eredeti mozgás vetületi mozgásának nevezzük. Legyen P_{xy} a P pont vetülete az x, y síkon. Ekkor P_{xy} pályája a P pont pályájának vetülete (125. ábra). P-nek az x tengelyre vonatkozó vetülete P_x. Ha P mozgástörvénye

X=x(t),   y=y(t),   z=z(t),

akkor P_x mozgástörvénye

x=x(t),   y=0,   z=0.

Hasonló a helyzet az y, z tengelyre vonatkozó vetületi mozgásoknál is. A vetületi pontok helyvektorai $\bar{r}_x$, $\bar{r}_y$, $\bar{r}_z$ -vel jelölve írhatjuk:



125.ábra

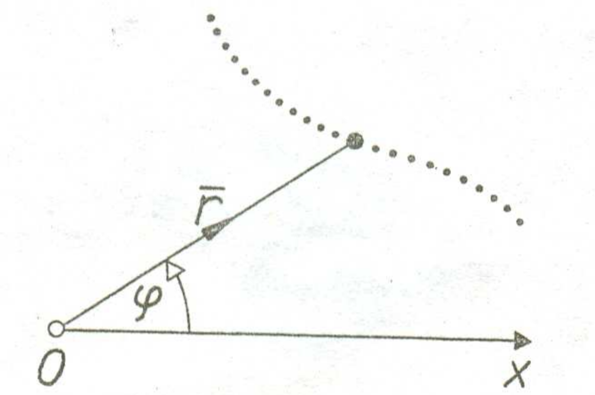
$$\bar{r} = \bar{r}_x + \bar{r}_y + \bar{r}_z \,.$$

Ezért a P mozgását a három vetületi mozgás <u>eredő</u> <u>mozgás</u>ának is mondják. P_x, P_y, P_z mozgása az <u>összetevő-mozgás</u> P mozgását meghatározza két koordináta síkon megadott vetületi mozgás (ezek nem függetlenek egymástól) vagy egy koordináta síkon és egy, a síkra merőleges tengelyen megadott vetületi mozgás.

POLÁRKOORDINÁTA-RENDSZER ALKALMAZÁSA

Síkbeli mozgás esetén olykor előnyös a mozgást polárkoordináta rendszerben vizsgálni.

A tömegpont helyzetét – vagyis az $\bar{r}$ helyvektort – jellemezhetjük egy 0 kezdőpontú, x tengelyű polárkoordináta rendszerben (126. ábra). A két koordináta a következő: $r = |\bar{r}|$, vagyis a pontnak a koordináta rendszer kezdőpontjától mért távolsága, φ, vagyis a helyvektornak polártengellyel bezárt (irányított) szöge: E koordináták persze az idő függvényei, más szóval a pont mozgását az



126.ábra

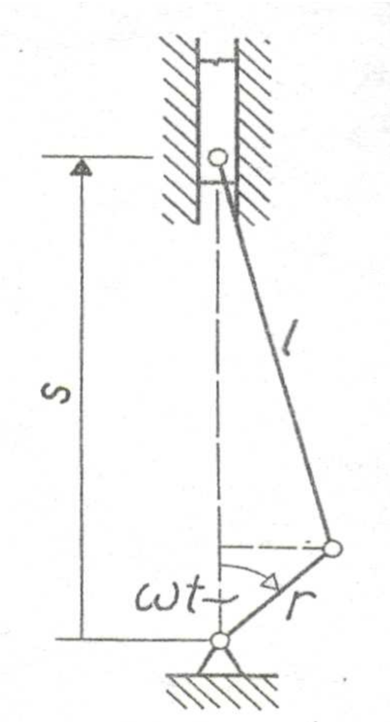
$$r = r\,(t), \qquad \varphi = \varphi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel adjuk meg.

22. Példa

Írjuk le a fűrészkeret mozgását! A keret mozgását a 127. ábrán látható ún. forgattyús mechanizmus végzi. Az r hosszúságú forgattyúkar egyenletesen forog, az időegység alatt söpört szög ω. Az r, l távolságok ismertek.

Megoldás.
Jellemezzük a keret helyzetét az s ívkoordinátával! Tegyük fel, hogy a forgattyúkar függőleges helyzetből indult el. t idő alatt a forgattyúkar által söpört szög ωt. Az ábra derékszögű háromszögeiből:

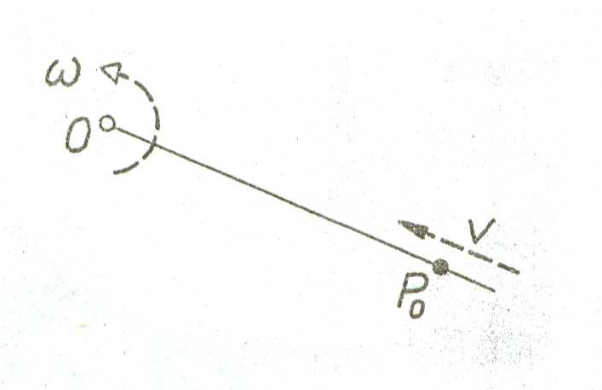


127.ábra

$$\underline{\underline{s = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t},}} \qquad s_{max} = r + l, \qquad s_{min} = l - r.$$

23. Példa

Egy 0 kezdőpontú félegyenes egyenletesen forog 0 körül (az egységnyi idő alatt söpört szög ω), miközben egy egyenletesen mozgó pont halad rajta, P_0-ból kiindulva 0 felé. Az egyenletesen mozgó pont egységnyi idő alatt v méter utat tesz meg (128. ábra).



128.ábra

Vizsgáljuk meg a mozgó pont pályáját a papír síkjában, ha $\overline{OP_o} = R_o$.

Megoldás.

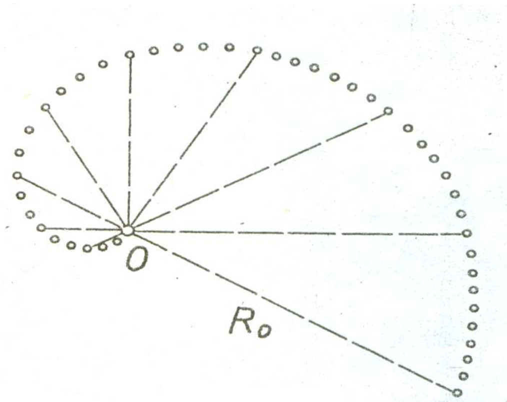
Vizsgáljuk meg a pályát a félegyenes kezdőhelyzetével egybeeső polárkoordináta rendszerben. t idő múlva a polárkoordináták a következők:

$$\underline{\underline{r = R_o - vt}} \qquad \underline{\underline{\varphi = \omega t.}}$$

Ez az <u>archimedesi</u> <u>spirális</u> (129. ábra) paraméteres egyenlete. A paramétert kiküszöbölve

$$r = R_0 - v\frac{\varphi}{\omega}.$$

A mozgó pont $T = \frac{R_0}{v}$ idő múlva jut 0-ba.



129.ábra

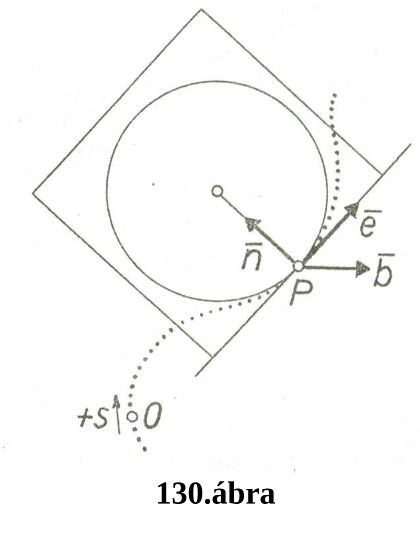
<u>3.2. Sebesség, gyorsulás</u>

ELŐKÉSZÍTÉS

Az alábbiakban felsoroljuk a térgörbék elméletének néhány olyan alapvető fogalmát, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

- Térgörbe <u>érintője</u>: a térgörbe P pontbeli érintője a görbe P és Q pontjain átmenő egyenes határhelyzete, midőn $Q \to P$.
- Térgörbe <u>simulósíkja</u>: a térgörbe P pontbeli simulósíkja a görbe három pontján átmenő sík határhelyzete, midőn a három pont tart P-hez.
- Térgörbe <u>simulóköre:</u> a térgörbe P pontbeli simulóköre a görbe három pontján átmenő kör határhelyzete, midőn a három pont tart P ponthoz. A simulókör síkja azonos a simulósíkéval.

Ha a térgörbének irányítást adunk, beszélhetünk valamely ponthoz tartozó pozitív irányú $\bar{e}$ <u>érintő egységvektor</u>ról (130. ábra). A P pontból a simulókör középpontja felé irányuló az $\bar{n}$ <u>főnormális</u>



130.ábra

egységvektor. Az előbbi kettőre merőleges a $\bar{b} = \bar{e}x\bar{n}$ binormális egységvektor.

Az $\bar{y} = \bar{y}(x)$ vektor-skalár függvény deriváltja a $\frac{d\bar{y}}{dx} = \lim_{0 \to 0} \frac{\bar{y}(x+\Delta x) - \bar{y}(x)}{\Delta x}$ vektor, melynek állása azonos az $\bar{y}(x)$ térgörbe megfelelő pontbeli érintőjének állásával. Ha az x paraméter az s előjeles ívhossz vagy ívkoordináta, akkor $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}$, a pozitív irányú érintő egységvektor. A vektor-skalár függvények differenciálási szabályai hasonlóak a skalárfüggvények deriválási szabályaihoz.

A SEBESSÉG ÉS GYORSULÁS DEFINÍCIÓJA

Mozogjon a tömegpont az ismert pályán az s=s(t) törvény szerint. Valamely t, t+Δt időközben a mozgásról bizonyos mértékű felvilágosítást nyújt a

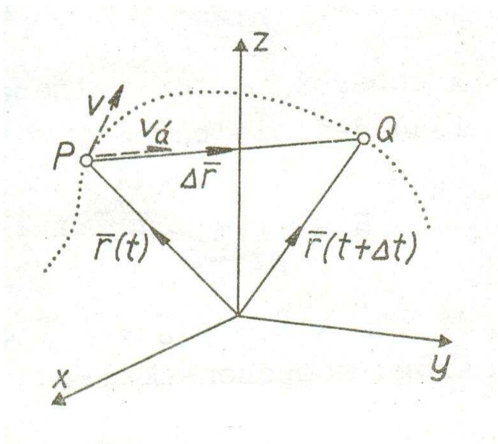
$$v_{átl} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Hányados: a mozgásnak a Δt időközre számított átlagos pályasebessége. Ez a skaláris mennyiség t-nek és Δt-nek is függvénye, s annál pontosabban jellemzi a mozgást a t időpontban, minél kisebb Δt. A mozgás t-beli pontos jellemzője az átlagsebességnek $\Delta t \to 0$ -ra adódó határértéke – a már csak t-től függő – pályasebesség:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{átl} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

(Az idő szerinti deriválást a deriválandó mennyiség jele fölé tett ponttal jelöljük).

Vagyis a pályasebesség az ívkoordináta idő szerinti első deriváltja. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a mozgás $\bar{r} = \bar{r}(t)$ alakban adott. Ha a mozgó pont t pillanatban a pálya P helyén van (131. ábra), t+Δt időpontban pedig q-ban,



131.ábra

akkor a Δt időközben végbement mozgás átlagsebessége:

$$\bar{v}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Ez a vektor a $\Delta \bar{r}$ vektorral egyállású és t-n kívül Δt-nek is függvénye. A mozgás pontos jellemzésére ismét az átlagsebesség vektor $\Delta t \to 0$-ra adódó határértéke, a sebesség alkalmas:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{\text{átl}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \qquad (m \cdot s^{-1}).$$

A sebességvektor tehát a helyvektor idő szerinti első deriváltja. Ez olyan vektor, melynek koordinátái a helyvektor koordinátáinak idő szerinti deriváltjai. A továbbiakban feltesszük, hogy az s=s(t) és az $\bar{r} = \bar{r}(t)$ függvények az idő szerint legalább kétszer deriválhatók. Ez a vektor csak t-nek függvénye, állása megegyezik a P-hez tartozó érintőével, iránya pedig a P-beli mozgásiránnyal. A sebességvektort a P ponthoz kötjük.

Az $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ mozgásfüggvényű pont sebessége a definíció értelmében

$$\bar{v} = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k},$$

ahol az $\dot{x} = \dot{x}(t),\ \ \dot{y} = \dot{y}(t),\ \ \dot{z} = \dot{z}(t)$ skaláris függvények a sebességkomponensek.

A sebességvektor a helyvektor változásának jellemzője.
A pályasebesség változást egy adott pillanatban a pályasebesség idő szerinti deriváltja mutatja. Ez a pályagyorsulás:

$$a_e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \qquad (m \cdot s^{-2}).$$

A sebességvektor változásának jellemzője, a gyorsulás, hasonlóan definiálható:

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{v}(t+\Delta t)-\bar{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\dot{\bar{v}}=\ddot{\bar{r}} \qquad (m\cdot s^{-2}).$$

Az $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ mozgásfüggvényű pont gyorsulása derékszögű komponensekkel:

$\bar{a}=\ddot{x}\bar{i}+\ddot{y}\bar{j}+\ddot{z}\bar{k}$.

A gyorsulásvektort a mozgó ponthoz kötjük.

Felbonthatjuk a sebességvektort és a gyorsulásvektort a pályagörbe természetes koordináta-rendszerében is.

Megmutatható, hogy ha $\bar{e},\bar{n},\bar{b}$ a pályagörbe természetes koordináta rendszerének egységvektorai, R a pályagörbe simulókörének sugara, a mozgástörvény $\bar{r}=\bar{r}(s)$, $s=s(t)$, akkor:

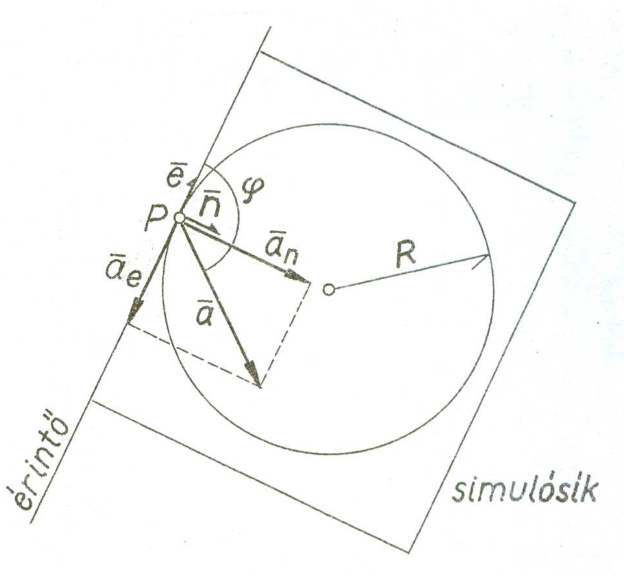
$$\bar{v}=v\bar{e}=\dot{s}\,\bar{e},$$

$$\bar{a}=\bar{a}_e+\bar{a}_n=\frac{dv}{dt}\bar{e}+\frac{v^2R}{}\bar{n}=\ddot{s}\,\bar{e}+\frac{\dot{s}^2}{R}\bar{n}\ .$$

Az $\bar{a}_e=\dot{v}\bar{e}$ érintőleges összetevő neve: pályamenti vagy tangenciális gyorsulás.

Az $\bar{a}_n=\dfrac{v^2}{R}\bar{n}$ összetevőé: centripetális vagy normális gyorsulás. A skaláris $\dot{v}$ és $\dfrac{v^2}{R}$ mennyiségek a gyorsulás pályamenti, ill. centripetális komponensei.

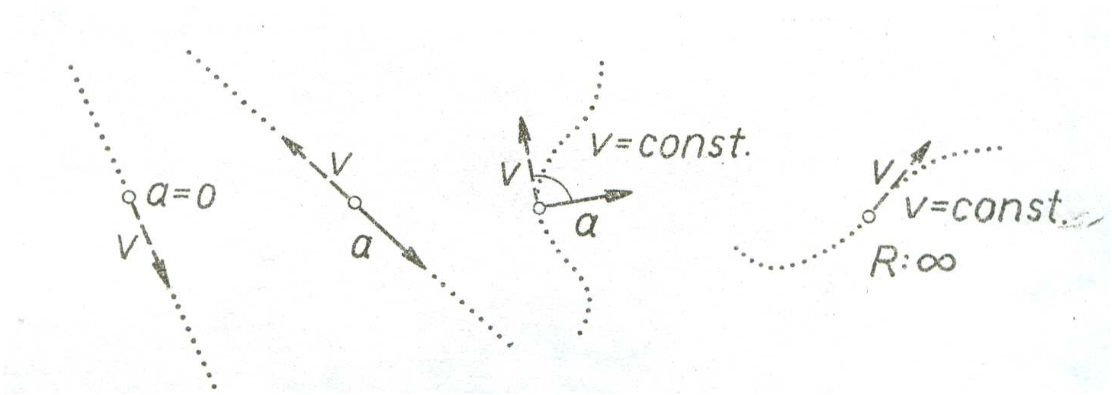
Amint a fentiekből kitűnik, általános esetben a gyorsulásvektor a pályagörbe P-beli simulósíkjában fekszik, s a sebességvektorral $0\le\varphi\le\pi$ (132. ábra) szöget zár be.



132.ábra

Másképpen: a gyorsulásvektor az érintő által kettéosztott simulósíknak abban a felében van, amelyben a görbületi középpont. A mozgás gyorsuló, ha a vizsgált pillanatban létezik gyorsulásvektor, vagyis ha a két gyorsuláskomponens közül legalább az egyik nem zérus. Az a_e komponens csak a pályasebesség változásától függ, a pálya alakjától független. $\bar{a}_e$ iránya megegyező vagy ellenkező a sebesség irányával az a_e előjelének megfelelően. Ha a pályasebesség állandó, a_e=0. A nem negatív a_n komponens a pályasebesség nagyságától és a pálya alakjától, pontosabban annak $\frac{1}{R}$ görbületétől függ. Ha a pálya egyenes, akkor – véges sebesség és végtelen görbületi sugár folytán – a_n=0.

Az alábbi ábrasor néhány speciális esetet szemléltet (133. ábra):



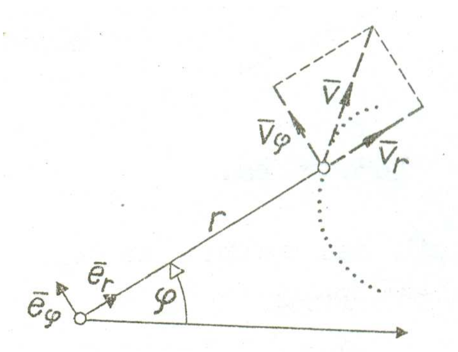
133.ábra

A hétköznapi nyelvhasználat „gyorsuló” mozgásról beszél, ha $a_e \rangle 0$ és „lassuló”-ról, ha $a_e \langle 0$.

Görbe pályán mozgó pont valójában mindig gyorsuló mozgást végez, mert legalább a_n létezik. Inflexiós pontban azonban $R = \infty$ miatt egy pillanatra eltűnhet a gyorsulás.

Olykor hasznos lehet az a tétel, mely szerint a tömegpont vetületi mozgásának sebessége, gyorsulása az eredeti mozgás sebességének, ill. gyorsulásának vetülete.

A SEBESSÉGVEKTOR POLÁRKOORDINÁTA RENDSZERBEN



134.ábra

Ha a mozgást polárkoordináta rendszerben vizsgáljuk, a sebességvektort egy helyvektorral egyirányú $\bar{e}_r$ és egy arra merőleges $\bar{e}\varphi$ egységvektor lineáris kombinációjaként írhatjuk fel (134. ábra). Mielőtt ezt a felbontást megadnánk, rámutatunk arra, hogy a φ polárkoordináta időbeli változása éppen úgy jellemezhető a $\varphi(t)$ függvény idő szerinti deriváltjával, miként az ívkoordináta változása $\dot{s}(t)$-vel. Vagyis beszélhetünk egy szögkoordináta sebességéről is. A $\varphi(t)$ függvény $\dot{\varphi}(t)$ deriváltja az $\bar{r}$ vektor <u>skaláris</u> <u>szögsebessége.</u> Ezek után a polárkoordináta rendszerben vizsgált mozgás sebességvektorának felbontása a következő:

$$\bar{v} + \bar{v}_r + \bar{v}_\varphi = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\bar{e}_\varphi .$$

24. Példa

Számítsuk ki a 22. Példában szereplő fűrészkeret pályasebességét.

Megoldás.

Mint láttuk, az ívkoordináta s=r cos $\omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}$ volt.

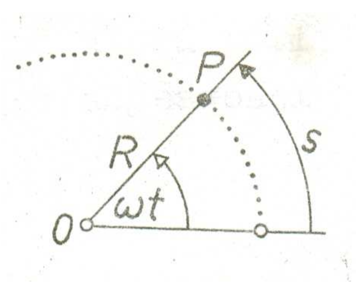
A pályasebesség: $v = \dot{s} = -r\omega \sin \omega t + \dfrac{-2r^2 \sin \omega t \cdot \omega \cos \omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}$,

$$\underline{\underline{\dot{s} = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}}}$$

25. Példa

Vizsgáljuk meg az egyenletes körmozgás kinematikai viszonyait, a mozgások leírására tanult különböző módszereket alkalmazva! Legyen a pályakör sugara R, a mozgó ponthoz tartozó sugár szögsebessége ω. Ívkoordináta alkalmazásával (135. ábra).

$\underline{\underline{s = R\omega t,}}$ $\underline{\underline{v = \dot{s} = R\omega,}}$ $\ddot{s} = 0.$

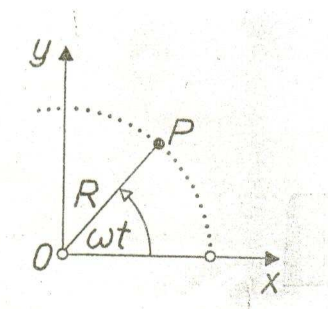


135.ábra

Derékszögű koordinátákkal (136. ábra):

$$\bar{r}\begin{cases} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \end{cases} \qquad \bar{v} = \dot{\bar{r}}\begin{cases} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}\begin{cases} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t. \end{cases}$$

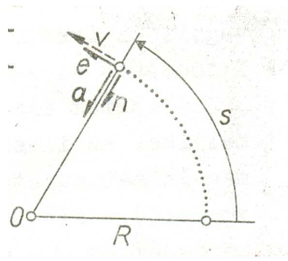


136.ábra

A sebesség- és gyorsulásvektor elhelyezkedésének tisztázása végett számítsuk ki a természetes koordináta rendszerre vonatkozó komponenseket és ábrázoljuk a $\bar{v}, \bar{a}$ vektorokat (137. ábra)!

Mint láttuk,

$$v = R\omega,\ a_e = \ddot{s} = 0,\ a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2,\ \text{tehát}\quad \bar{a} \equiv \bar{a}_n\ .$$

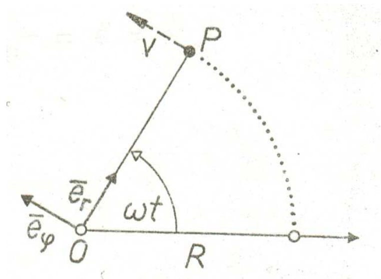


137.ábra

Végül polárkoordináta rendszerben (138. ábra):

$$\bar{r}\begin{cases} R \\ \omega t \end{cases},\quad \bar{v}\begin{cases} 0 \\ R\omega \end{cases},$$

a gyorsulásvektorral nem foglalkozunk.



138.ábra

3.3. Kinematikai alapfeladatok.

Ismert pálya esetén az s=s(t) függvény a mozgást teljesen meghatározza. Ebben az esetben differenciálásokkal állíthatjuk elő a pályasebességet és a pályagyorsulást.
Előfordulhat azonban, hogy a mozgásjellemzők $(s, \dot{s}, \ddot{s})$ nem az idő, hanem egymás függvényében ismeretesek. A mozgás összes lehetséges megadási módjait az alábbi táblázatban szemlélteti:

	t	s	$\dot{s}$	$\ddot{s}$
t	–	t(s)	$t(\dot{s})$	$t(\ddot{s})$
s	s(t)	–	$[s(\dot{s})]$	$s(\ddot{s})$
$\dot{s}$	$\dot{s}(t)$	$\dot{s}(s)$	–	$\dot{s}(\ddot{s})$
$\ddot{s}$	$\ddot{s}(t)$	$\ddot{s}(s)$	$\ddot{s}(\dot{s})$	–

A táblázat második rovatában és harmadik oszlopában álló függvény jelentése például: a mozgás s=s($\dot{s}$) alakban adott, vagyis az ívkoordináta a pályasebesség függvényeként ismeretes.

A táblázat tizenkét függvényének bármelyikéből – esetleg további adatok ismeretében – előállítható a többi tizenegy bármelyike. Az ilyen kinematikai alapfeladatok közül néhánynak a megoldását mutatjuk be.

Adott: $v = \dot{s}(t)$ és az összetartozó t_0, s_0 értékpár, keressük az s=s(t) függvényt.

Megoldás:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}, \qquad ds = \dot{s}\,dt, \qquad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} \dot{s}(t)\,dt,$$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{s}(t)\,dt.$$

Ha a pályagyorsulás ismert az idő függvényében, hasonlóan, integrálással kapjuk a pályasebességet. Ekkor ismerni kell összetartozó idő- és pályasebesség-adatokat. További kinematikai feladat:

Adott: $\ddot{s} = \ddot{s}(s),\ s_0, v_0$

Keressük a v(s) függvényt.

Megoldás:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} \ddot{s}(sw)\,ds} \qquad \text{vagy} \qquad v = -\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} \ddot{s}(s)\,ds}$$

Az s=s(t), $v = \dot{s} = \dot{s}(t)$, $a_e = \ddot{s} = \ddot{s}(t)$ függvények grafikonjai az ún. kinematikai diagramok (foronomia görbék). Nem tévesztendők össze a pályagörbével!

Természetesen ezek a grafikonok meghatározott kapcsolatban állnak egymással, hiszen azok a függvények, melyeket ábrázolnak, egymásból differenciálással, ill. Integrálással nyerhetők. A valamely zárt intervallumban folytonos egyváltozós f(x) függvény és F(x) primitív függvénye között fennálló $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ összefüggés, valamint az s, $\dot{s}, \ddot{s}$ közötti kapcsolat alapján megállapítjuk, hogy: Adott t_1, t_2 időközben az ívkoordináta megváltozása egyenlő a v-t ábra alatti síkidom előjeles területével.

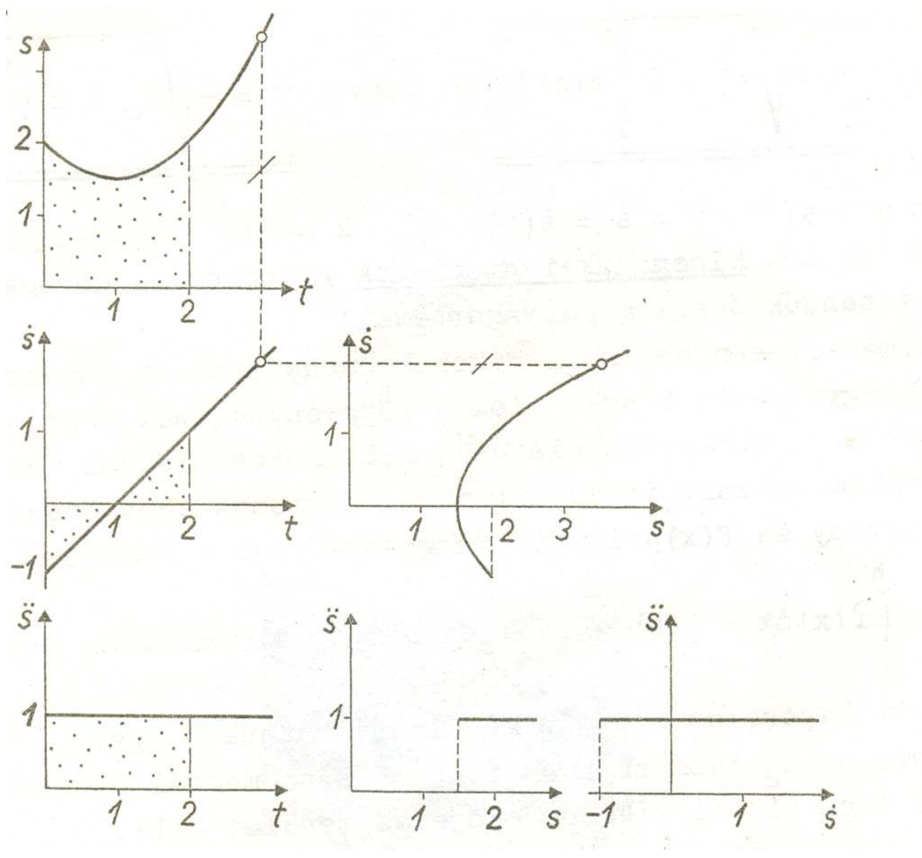
$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{s}(t)dt = s(t_2) - s(t_1).$$

Adott t_1, t_2 időközben a pályasebesség megváltozása egyenlő az a_e-t ábra alatti síkidom előjeles területével:

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{s}(t)dt = \dot{s}(t_2) - \dot{s}(t_1).$$

Legyen például $s = 2 - t + \frac{1}{2}t^2$, $\dot{s} = -1 + t$, $\ddot{s} = 1$, $t_t = 0$, $t_2 = 2$. Számítsuk ki az ívkoordináta és a pályasebesség megváltozását a megadott időközben:

$$\Delta s = s(2) - s(0) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 = 0, \quad \Delta v = \dot{s}(2) - \dot{s}(0) = -1 + 2 - (-1) = 2 .$$



139. ábra

A kinematikai diagramokról ugyanezt az eredményt olvashatjuk le (139. ábra)

Az $s(t)$, $\dot{s}(t), \ddot{s}(t)$ kinematikai diagramokból előállíthatók az $\dot{s}(s), \ddot{s}(s), \ddot{s}(\dot{s})$ kinematikai diagramok is. Ilyen szerkesztés is nyomon követhető a 110. ábrán: $\dot{s}(s)$ diagram. Ha a kinematikai diagramok közül valamelyik szerkesztés vagy közvetlen mérés alapján adott, akkor a hiányzó diagramok előállítása grafikus úton történhet. Ilyenkor grafikus differenciálásai, ill. integrálási ajánlással érünk célt. E módszereket illetően a felsorolt irodalomra utalunk.

26. Példa

Egy jármű lehetséges legnagyobb gyorsulása, (ill. lassulása) a_{max}, legnagyobb pályasebessége v_{max}.

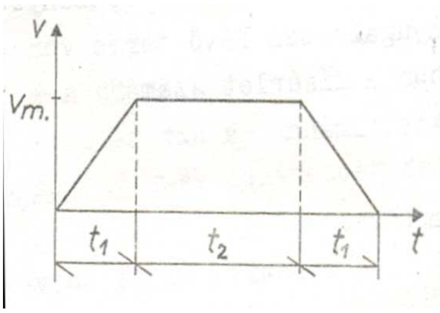
Határozzuk meg azt a legkisebb időt, mely alatt a jármű egy d hosszúságú pályaszakaszt befuthat.

Megoldás.

Vázoljuk fel a sebességábrát (140. ábra)! A legkisebb menetidőre törekszünk, tehát a lehetséges legnagyobb gyorsulással érjük el v_{max}-ot. A gyorsításhoz szükséges idő t_1. Maximális sebességgel halad a jármű t_2 ideig, t_1 idő alatt lassul le ismét zérus sebességre. A teljes menetidő:

$$T=2\,t_1 + t_2.$$

Az ábra geometriájából, ill. a sebességábra tulajdonságaiból következik, hogy



140.ábra

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a_{max}}, \quad d = v_{max}(t_1 + t_2), \quad t_2 = \frac{d}{v_{max}} - t_1 = \frac{d}{v_{max}} - \frac{v_{max}}{a_{max}},$$

$$\underline{\underline{T = \frac{d}{v_{max}} + \frac{v_{max}}{a_{max}}}}\,.$$

3.4. A kinetika axiómái és a tömegpont mozgásegyenlete

NEWTON-AXIÓMÁK

A kinetika főfeladata a testek mozgásának leírása a testekre ható erők ismeretében.

Ezt a feladatot néhány alapfeltevés – a NEWTON-féle axiómák – segítségével oldjuk meg. Ezek a tömegpontra érvényes kijelentések közvetlenül nem bizonyítottak, helyességükre a belőlük következő megállapítások s a tapasztalat egyezéséből következtetünk.

Első axióma: Minden test (tömegpont) megmarad a nyugalomnak vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgásnak az állapotában míg más testek hatásai állapotát meg nem változtatják.

A testek azon tulajdonságát, hogy külső hatás hiányában sebességállapotukat változatlanul megtartják, tehetetlenségnek, az axiómát pedig tehetetlenség törvényének is nevezik. A tehetetlenség törvénye közvetlenül nem igazolható, mert a testeket más testek hatása alól telje3sen kivonni nem tudjuk. A törvény egyértelműsége végett meg kell állapítani, hogy a nyugalmi helyzetet mihez viszonyítsuk. NEWTON az axiómát az abszolút nyugalomban lévő térre vonatkoztatta. Ez utóbbi fogalom azonban a kísérlete számára nem hasznosítható. A törvény lényeges tartalmának ma ezt tekintjük, hogy van olyan rendszer – az ún. tehetetlenségi vagy inercia-rendszer melyben érvényes az első axióma.

A kinetika egyéb törvényeit is ilyen rendszerre vonatkoztatjuk. Az eddigi tapasztalatok szerint – az asztronómiában használt – bizonyos állócsillagokhoz kötött koordináta-rendszer, inercia-rendszer. A műszaki mechanikában a Földhöz kötött koordináta rendszer is sok esetben inercia-rendszernek tekinthető.

Azt, amit az első axiómában „más testek hatása”-ként említettünk, vagyis az erőt, a második axióma definiálja:

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \overline{F}.$$

Itt $\overline{v}$ a tömegpont sebessége, az m arányossági tényező egy pozitív, a test tehetetlenségének mértékét kifejező fizikai mennyiség, a test tömege (pontosabban tehetetlen tömege). A tömeg a testnek egyik legfontosabb jellemzője, mely (nem atomi méretű és nem nagyon nagy sebességű testek esetén (állandó az időtől, a helytől, a test mozgásától és a reá ható erőktől független). Ilyen esetben a második axióma

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = m\overline{a} = \overline{F}$$

Alakban is felírható.

Az az erő, melyet a Föld valamely testre kifejt, a test súlya (súlyon gyakran csak az említett erő nagyságát értik). Egy adott test súlya – tömegével ellentétben – a tér különböző helyein más és más. Tapasztalatunk szerint a szabadon eső testnek gyorsulása a tér egy adott helyén minden testre ugyanaz (légüres térben).

Egy m tömegű test súlya olyan helyen, ahol a gyorsulás $\overline{g}$, a II. axióma értelmében $\overline{G} = m\overline{g}, \text{ill.} \left|\overline{G}\right| = G$ és $\left|\overline{g}\right| = g$ jelöléssel G=mg. Az erő nagyságának mértékegysége a newton (N), az az erő, mely az egységnyi gyorsulással mozgó egységnyi tömegre hat:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

A régebben használatos kilopond vagy kilogrammsúly és a newton közötti kapcsolat: 1 kp ≈ 9,81 N.

Harmadik axióma (a kölcsönhatás törvénye, hogy az akció reakció elve).
Ha egy anyagi pont vagy általában egy test egy másik testre hatást gyakorol, akkor a másik test is hatást fejt ki az elsőre s e két erő egyenlő nagy és ellentétes irányú. Tehát ha az A test által a B testre kifejtett erő $\overline{F}_{AB}$s a B test által az A-ra gyakorolt hatás $\overline{F}_{BA}$, akkor

$$\overline{F}_{AB} = -\overline{F}_{BA}.$$

Negyedik axióma (az erőhatások függetlenségének elve): Ha ugyanarra a tömegpontra egyidejűleg több erő hat, ezek együttes hatása egyenértékű az erők vektorális összegzéssel nyert eredőjének hatásával. Ha az m tömegű anyagi pontra ható erők $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ s az általuk létrehozott gyorsulások külön $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, akkor

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = m(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n).$$

A KINETIKA ALAPEGYENLETE

A tömegpont kinematikája és kinetikája között kapcsolatot teremtő $\overline{F} = m\overline{a}$ alaptörvényt a dinamika alapegyenletének is nevezik. Ha az erőt és gyorsulást derékszögű koordináta rendszerben bontjuk fel, az alapegyenlet a következő alakot ölti:

$$F_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = m\ddot{y}, \qquad F_z = m\ddot{z}.$$

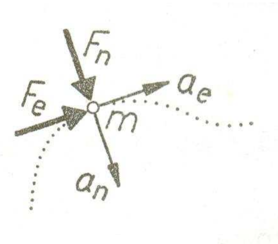
F_x, F_y, F_z az erőkomponensek, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ a gyorsuláskomponensek. A felbontás történhet a tömegpont pályájának természetes koordináta rendszerében is.

Mint láttuk, a gyorsulásvektor felírható érintő irányú $\overline{a}_e$ és normális irányú $\overline{a}_n$ összetevők összegeként. A II. axióma értelmében mondhatjuk, hogy a tömegpontra

$$\overline{F}_e = m\overline{a}_e, \quad \text{ill.} \quad \overline{F}_n = m\overline{a}_n$$

erő hat. Az F_e erő neve: érintőleges vagy tangenciális erő. F_n neve: normális vagy centripetális erő (141. ábra). Felhívjuk a figyelmet arra az F_n centripetális erő – vagyis a centripetális gyorsulást előidéző erő – nem tévesztendő össze azzal az erővel, melyet a tömegpont gyakorol az F_n-t szolgáltató testre. Ez a reakcióerő a centripetális erő ellenereje.

A természetes koordináta rendszerben felbontott gyorsulásnak binormális irányú összetevője nincs, így F_b=0.



141.ábra

Ebben a koordináta rendszerben tehát az alapegyenlet így néz ki komponens alakban:

$$F_e = m\frac{dv}{dt} = m\ddot{s}, \quad F_n = m\frac{v^2}{R} = m\frac{\dot{s}^2}{R}.$$

E két egyenlet közül az elsőből következik, hogy:

állandó pályasebesség – vagyis $\frac{dv}{dt} = 0$ esetén $F_e = 0$,

változó pályasebesség esetén $F_e \neq 0$.

A második egyenlet értelmében: állandó pályasebesség esetén $F_n \to \infty$, ha $R \to 0$, állandó görbületi sugár esetén $F_n \to \infty$, ha $v \to 0$.

Mozgó tömegpontra ható erő mindkét komponense csak abban az esetben zérus, ha v állandó és a görbületi sugár végtelen nagy. A mozgásegyenletek két feladattípus megoldására alkalmasak:

1. Ismert a tömegpont mozgása és keressük a mozgást előidéző erőket.
   Rendszerint adott a pálya és a pályabefutásának törvénye.
   Ilyenkor célszerű az alapegyenlet:

$$F_e = m\frac{dv}{dt}, \qquad F_n = m\frac{v^2}{R} \text{ alakját alkalmazni.}$$

2. Ismertesse a tömegpontra ható $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \dot{\overline{r}})$ és keressük a létrejövő mozgást, vagyis azt az $\overline{r} = \overline{r}(t)$ függvényt, mely az $\overline{F} = m\ddot{\overline{r}}$ differenciál egyenletet kielégíti.

Ez a feladat típus nehezebb, és nem minden esetben oldható meg szigorúan. A megoldáshoz ismerni kell a t_0 időponthoz tartozó $\overline{r}_0, \dot{\overline{r}}_0$ kezdeti értékeket, összesen 6 állandót.

27. Példa

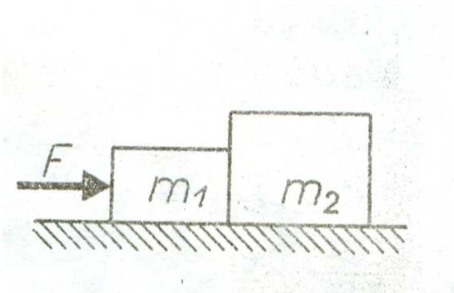
Adott a 142. ábrán látható, vízszintes síkon nyugvó, sima felületű hasábok m_1, m_2 tömege, valamint az F erő.

Meghatározandó az m_2 tömegű hasábra ható F' erő.

Megoldás.

Az alapegyenlet az m_2 tömegű hasábra:

$F' = m_2 a_2$, ahol a_2 a két hasáb közös pályagyorsulása.



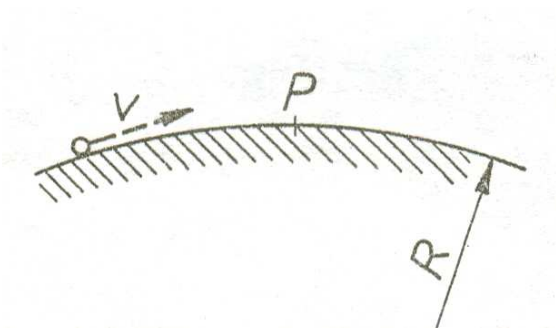
142.ábra

Ez az $F= (m_1+m_2)a_2$ egyenletből:

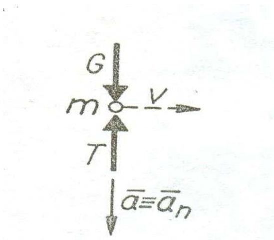
$$a_2 = \frac{F}{m_1 + m_2}, \text{ tehát a keresett erő: } \underline{\underline{F' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F.}}$$

28. Példa

G súlyú jármű állandó v pályasebességgel halad végig a vázolt pályaszakaszon (143. ábra). A pálya görbületi sugara a legfelső P pontban R. Mekkora erővel nyomja a jármű a pályát P-ben?



143.ábra



144. ábra

Megoldás.

A keresett erővel egyenlő nagy, de ellentétes T erőt gyakorol a talaj a járműre. A tömegpontra ható erőket, a sebességet és a gyorsulást – mely most azonos a centripetális gyorsulással – a 144. ábra szemlélteti.

Az alapegyenlet:

$$G - T = \frac{G}{g}\frac{v^2}{R}, \qquad T = G\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right),$$

ekkora erővel nyomja a jármű a talajt.

$v = \sqrt{gR}$ sebesség esetén a jármű kereke és a talaj közötti erőátadás megszűnik. Ha a pálya görbületi sugara azonos a Föld sugarával (kb. 6400 km), akkor az erőátadás $v = \sqrt{9{,}81 \cdot 6\,400\,000} = 7923{,}6\,\mathrm{m/s} \approx 8\,\mathrm{km/s}$ sebességnél szűnik meg.

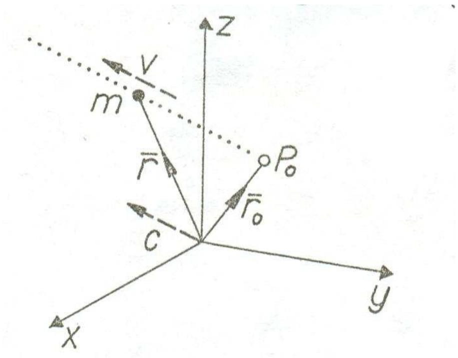
Körülbelül ekkora a Föld közelében keringő mesterséges holdak sebessége is.

3.5. A tömegpont legfontosabb mozgástípusai

Az alábbiakban áttekintjük a tömegpontnak a műszaki gyakorlat szemszögéből a legfontosabb mozgástípusait.

A. Állandó sebességű mozgás

Mozgástörvénye: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{c}\,t, \bar{r}_0, \bar{c}$ állandó vektorok, $\bar{r}$ mértékegysége m, $\bar{c}$-é m.s^{-1}, $\bar{c} \neq 0$ (145. ábra).



145.ábra

A pálya: az $\bar{r}_0$ helyvektorú P_0 ponton átmenő és a $\bar{c}$ vektorral párhuzamos egyenes (vagy annak része),

a sebesség: $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{c}$,

a gyorsulás: $\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = 0$,

a tömegpontra ható erő: $\bar{F} = 0$.

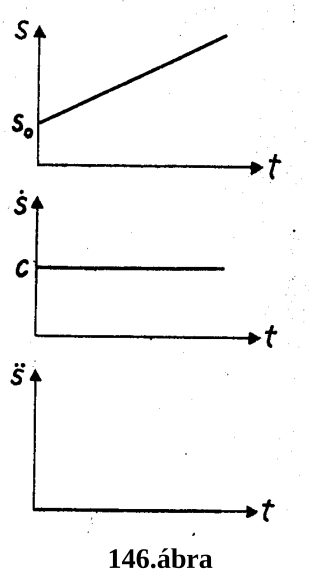
A tömegpont akkor és csakis akkor végez ilyen mozgást, ha a rá ható erők eredője zérus.

E mozgásfajtát egyenes vonalú egyenletes mozgásnak is nevezik. Könnyen belátható, hogy $|\bar{c}| = c$ jelöléssel a pálya befutásának törvénye: $s=s_0+ct$,

a pályasebesség: $v = \dot{s} = c$,

a pályagyorsulás: $a_e = \ddot{s} = 0$.

A foronómiai görbéket a 146.ábra szemlélteti.



146.ábra

B. Állandó gyorsulású mozgás

Mozgástörvénye:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{c}\,t + \frac{1}{2}\bar{a}\,t^2 \qquad a \neq 0,$$

$\bar{r}_0(\mathrm{m})$, $\bar{c}(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$, $\bar{a}(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$ állandó vektorok.

A mozgás megállapításánál két esetet különböztetünk meg:

a) $\bar{c} \| \bar{a}$, ekkor a mozgást egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgásnak nevezik.

A pálya: az $\bar{r}_0$ helyvektorú pontos átmenő,

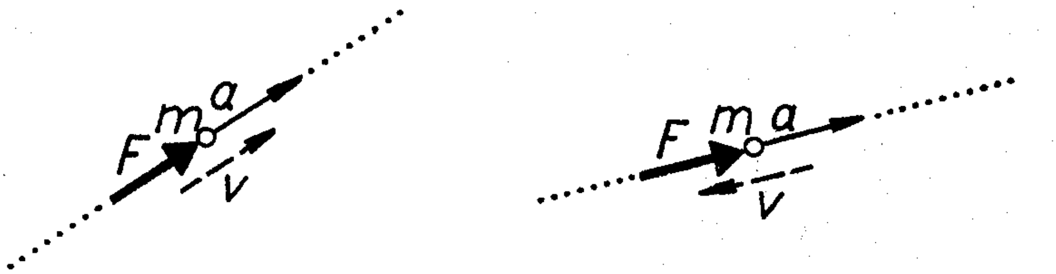
$\bar{c}$ és $\bar{a}$ vektorokkal párhuzamos egyenes.

A sebesség: $\bar{v} = \ddot{\bar{r}} = \bar{c} + \bar{a}t$,

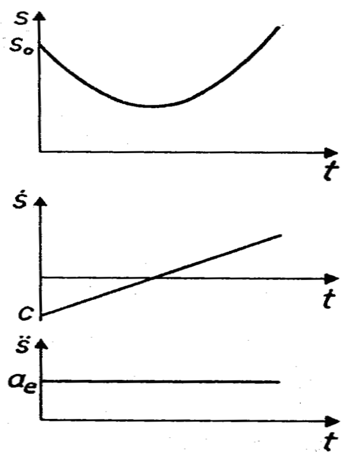
a gyorsulás: $\ddot{\bar{r}} = \bar{a}$,

a tömegpontra ható erő: $\bar{F} = m\bar{a}$.

Tehát a sebesség az időben lineárisan változik, a gyorsulás állandó. A II. axióma értelmében a tömegpontra állandó, a gyorsulással egyező irányba mutató vektorú erő hat. E mozgástípus kinematikai és kinetikai viszonyait a 147.ábra szemlélteti.



147.ábra



148.ábra

A pálya befutásának törvénye: $s = s_0 + ct + \frac{1}{2}a_e t^2$,

a pályasebesség: $v = \dot{s} = c + a_e t$,

a pályagyorsulás: $a_e = \ddot{s}$.

Abban az esetben, midőn s_0=0, c=0, érvényesek a következő összefüggések:

$$s = \frac{1}{2}a_e t^2, \quad v = a_e t, \quad v = \sqrt{2a_e s.}$$

A foronomiai görbéket a 148.ábra szemlélteti.

b.) $\bar{c}$ vektor nem párhuzamos $\bar{a}$ -val: <u>állandó</u> <u>gyorsulású</u> <u>mozgás.</u>

Ennél a mozgásnál az

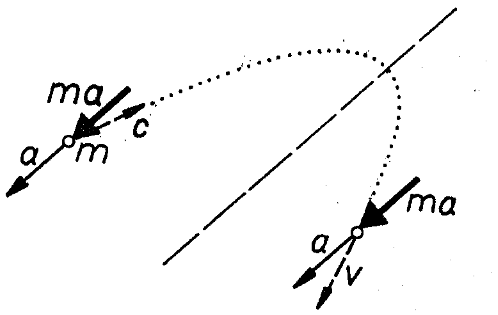
$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{c}t + \frac{1}{2}\bar{a}t^2 = \bar{r}^x$$

(az $\bar{r}_0$ helyvektorú pontból a tömegpontba mutató) vektor a $\bar{c}t$ és az $\frac{1}{2}\bar{a}t^2$ vektorok eredője, a tömegpont tehát mindig a P_0 kezdőpontú $\bar{a}$ és $\bar{c}$ vektorok által kifeszített síkban van. Megmutatható, hogy a pálya olyan parabola íve, melynek tengelye párhuzamos az $\bar{a}$ vektorral.

E mozgástípusnál a sebesség: $\dot{\bar{r}} = \bar{c} + \bar{a}\,t$,

a gyorsulás: $\ddot{\bar{r}} = \bar{a}$.

Az állandó gyorsulású mozgás jellemzőit s a tömegpontra ható erőt a 149. ábra szemlélteti.



149.ábra

Bizonyítás nélkül megemlítünk két, az állandó gyorsulással kapcsolatos tételt:

<u>**Tétel:**</u> Ha az állandó gyorsulású mozgás sebessége t_1 t_2 időpontokban $\bar{v}_1$, illetve $\bar{v}_2$, akkor az említett időközökben

$$\bar{v}_{átl} = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2} .$$

<u>**Tétel:**</u> Ha az állandó gyorsulású mozgás sebessége t_1 t_2 időpontokban $\bar{v}_1$, illetve $\bar{v}_2$, az elmozdulás vektor $\Delta\bar{r}$, a gyorsulás $\bar{a}$, akkor

$$\bar{v}_2^2 = \bar{v}_1^2 + 2\bar{a}\Delta\bar{r} .$$

C. <u>Körmozgás</u>

A tömegpont <u>körmozgást</u> végez, ha a pálya kör, vagy körív. Legfontosabb és legegyszerűbb fajtája az <u>egyenletes</u> <u>körmozgás.</u> Ezt az jellemzi, hogy a tömegpont állandó sebességgel halad körön, vagyis: $v = \dot{s} =$ állandó.

Ezt a mozgástípust a 24. példában megvizsgáltuk, itt már csak kiegészítjük az ottani megállapításokat.

A pálya egyszeri befutásának ideje a keringési idő, vagy

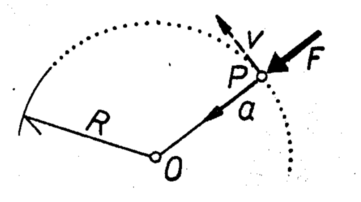
$$\underline{\text{periódus:}}\ T = \frac{2\pi}{\omega}(s).$$

A másodpercenkénti fordulatok száma a

$$\underline{\text{frekvencia:}}\ f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (s^{-1}).$$

Az $\omega = 2\pi f$ összefüggés alapján ω-t <u>körfrekvenciá</u>nak is nevezik. A kinematikai és kinetikai viszonyokat a 150.ábra szemlélteti. A tömegpontra állandó nagyságú erő hat, melynek vektora:

$$\overline{F} = m\overline{a} = -m\omega^2\overline{r} \qquad (\overline{r} = \overrightarrow{0P}).$$



150.ábra

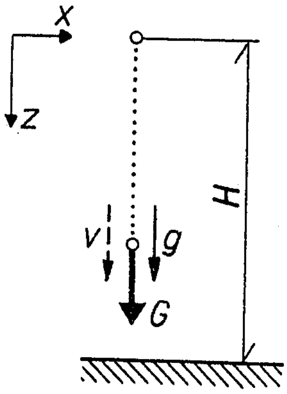
A tömegpont mozgása közben az állandó nagyságú $\overline{r}, \overline{v}, \overline{a}$ vektorok állandó szögsebességgel forognak.

Gyakran fordul elő az állandó pályagyorsulású körmozgás is. Ezzel a későbbiekben is foglalkozunk.

D. Szabadesés, hajítások

Ha a tömegpontot a Föld nehézségi erőterében magára hagyjuk és a tömegpont kezdeti sebessége $\overline{v}_0 = 0$, a mozgást <u>szabad</u> <u>esés</u>nek nevezik. Ha $\overline{v}_0 \neq 0$, a mozgás neve <u>hajlítás.</u>

Az egyszerűség kedvéért a levegő ellenállását elhanyagoljuk és feltesszük, hogy a mozgás a földfelület közelében (legfeljebb néhány 100 méteres magasságban) történik. Ilyen körülmények között a szabadon eső tömegpont függőlegesen lefelé mozog, gyorsulásának nagysága: g = 9,81 m . s^{-2} és a tömegpontra ható egyetlen erő a súlyerő. A 151.ábrán látható koordináta rendszerben



151.ábra

$$\bar{r} = \frac{1}{2} g t^2 \bar{k}, \text{ illetve } z = \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = g t \bar{k}, \text{ illetve } \dot{z} = v = g t,$$

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{a} = g \bar{k}, \text{ illetve } \ddot{z} = a_e = g.$$

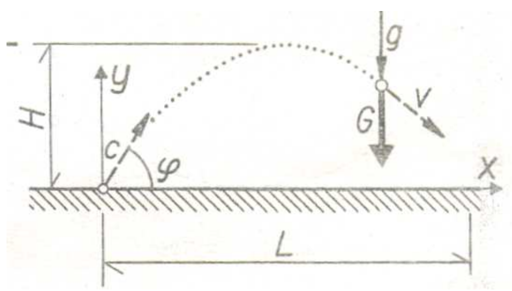
sés idejét T jelöli, akkor:

$$H = \frac{1}{2} g T^2, \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

a végsebesség: $v_H = \sqrt{2g\,H}.$

Pontosabb vizsgálatok szerint a szabadesés bonyolult jelenség (pl. a nehézségi gyorsulás több változó függvénye, a légellenállás nem hanyagolható el, a Föld forgása is figyelembe veendő), de a műszaki gyakorlat igényeit az egyszerűsített tárgyalásmód is kielégíti. A hajításokat szokás felosztani a $\bar{v}_0 \neq 0$ sebességvektor vízszintes, függőleges és ferde helyzete alapján. Mi a legáltalánosabb esetet tekintjük át, a <u>ferde hajítást,</u> melynél a $\bar{v}_0$ vektornak a vízszintessel bezárt szöge $0 \langle \varphi \langle 90^o$.

A $\varphi = 0$ eset – a <u>vízszintes</u> <u>hajítás,</u> és a $\varphi = 90^o$ - a <u>függőleges</u> <u>hajítás</u> – a ferde hajítás különleges eseteinek tekinthetők. A ferdén elhajított tömegpontra mozgása közben egyetlen erő hat, a súlyerő. A súlyerő, a tömeg és a gyorsulás állandóságából, valamint az állandó gyorsulású mozgás tulajdonságaiból következik, hogy a ferdén elhajított tömegpont pályája függőleges tengelyű parabola (152. ábra). Az ábrán látható koordináta rendszerben könnyen felírhatjuk a pálya egyenletét és néhány jellemző adatát. Az állandó gyorsulású mozgásra tanultak értelmében:



152.ábra

$$\bar{r} = \bar{c}\, t + \frac{1}{2} \bar{a}\, t^2.$$

Itt $\bar{c} = |\bar{c}\cos\varphi\bar{i} + |\bar{c}|\sin\varphi\,\bar{j}|$,

$$\bar{a} = \ddot{y}\,\bar{j} = -g\,\bar{j}.$$

A tömegpont koordinátái tehát $c = |\bar{c}|$ jelöléssel:

$$x = c\cos\varphi\, t, \quad y = c\sin\varphi\, t - \frac{1}{2} g\, t^2.$$

A pálya explicit egyenlete: $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \dfrac{g}{2c^2\cos^2\varphi}x^2$.

Ebből a hajítási távolság: $L = \dfrac{c^2}{g}\sin 2\varphi$.

Ez akkor maximális, ha $\varphi = 45^o$, ekkor $L_{max} = \dfrac{c^2}{g}$.

A röppálya magassága: $H = \dfrac{c^2\sin^2\varphi}{2g}$.

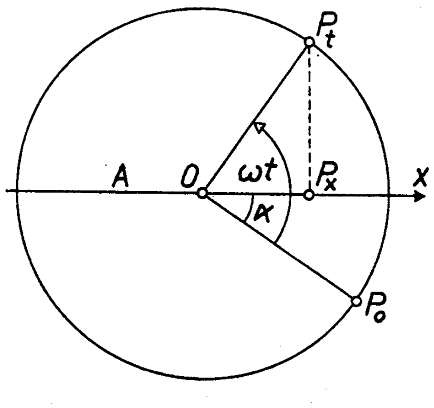
E. Harmonikus rezgő mozgás

A következőkben az egyenletes körmozgás vetületi mozgását vizsgáljuk.

Egy A sugarú körön állandó pályasebességgel mozgó pont kezdeti helyzete legyen P_0 és a ponthoz vezető sugár szögsebessége ω. Vetítsük a körön mozgó pontot az 0 kezdőpontú és a kör síkjában fekvő x tengelyre.

A vetületi pont mozgástörvénye a 153. ábra alapján: x = A cos $(\omega t - \alpha)$.

Könnyen belátható, hogy a tengely alkalmas megválasztásával a vetületi pont mozgástörvénye általában x = A cos , vagy x = B sin $(\omega t - \beta)$.



153.ábra

Mindezeket a mozgásokat harmonikus rezgő mozgásnak nevezik. A mozgás függvényekben szereplő A (ill. B) – távolság dimenziójú mennyiség – a harmoniku8s rezgő mozgás amplitúdója, $\alpha(\beta)$ a nullafázisszög vagy fáziseltolási szög, ω a rezgés vetítő szögsebessége vagy körfrekvenciája. A vetületi pont a tengelyen váltakozó irányban mozog, miközben a származtató pont befutja a kört.

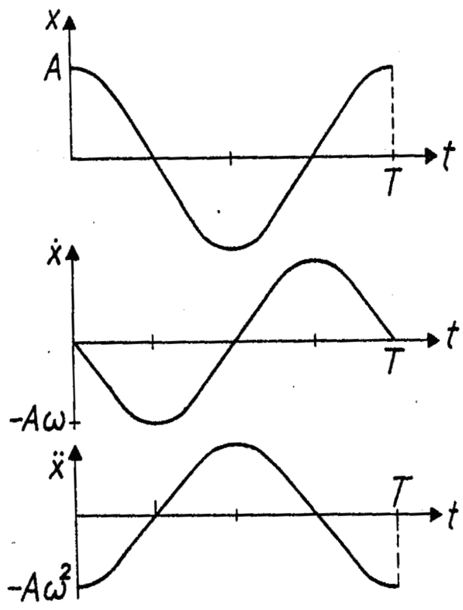
A rezgésidő és rezgésszám hasonlóan definiálható, mint a körmozgásnál.

A harmonikus rezgőmozgás

pályasebessége: $v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$,

pályagyorsulása: $a_e = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$.

A foronómiai görbéket a 154. ábra szemlélteti. A fenti egyenletekből, ill. a foronómiai görbékből a harmonikus rezgő mozgás következő fontos tulajdonságai olvashatók le:



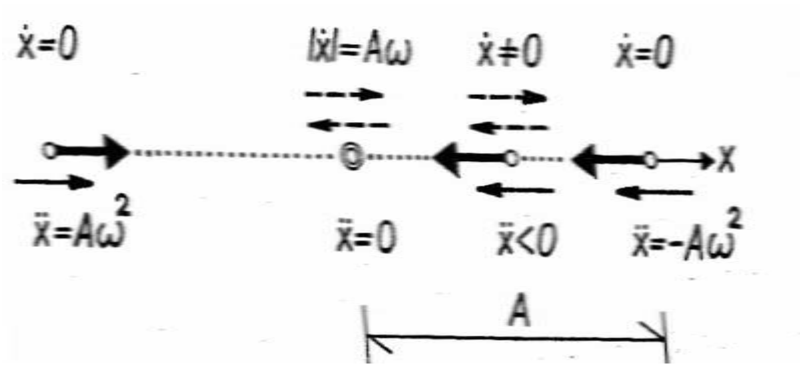
154.ábra

a) x, v, e_e $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ szerint periodikus

b) a pályasebességnek szélső értéke van, midőn az ívkoordináta zérus és megfordítva,

c) a pályagyorsulásnak szélső értéke van midőn $|x| = A$, x=0-nál a pályagyorsulás zérus,

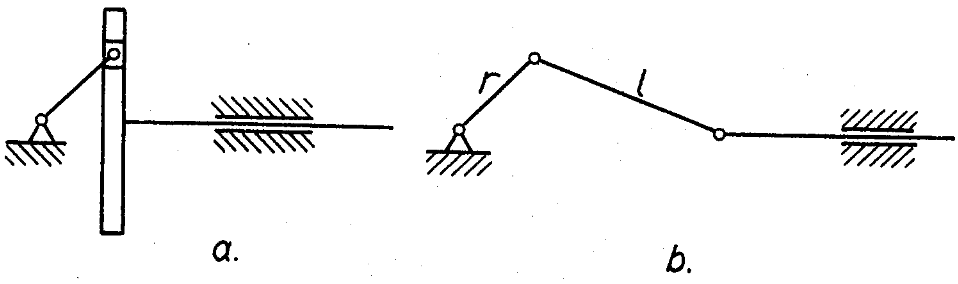
d) a pályagyorsulás egyenesen arányos az ívkoordinátával, de ellentétes előjelű.



155.ábra

Megjegyezzük, hogy mindezek a tulajdonságok beláthatók a vetületi mozgásokra tanultak alapján is. A harmonikus rezgő mozgást végző tömegpont mozgásjellemzőit s a reá ható erőt a pálya néhány pontjában a 155. ábra szemlélteti.

E mozgásfajta műszaki jelentőségét az adja, hogy a gyakorlatban előforduló periodikus mozgások sokszor, közelítőleg harmonikus mozgások, vagy ilyenekből összetettnek tekinthetők. A 156. ábrán látható mechanizmusokkal megvalósítható a harmonikus rezgő mozgás. A kulisszás mechanizmussal (156/a) pontosan, a forgattyús mechanizmussal (156/b közelítőleg a közelítés annál jobb, minél nagyobb l / r).



156.ábra

Ha a mozgásjellemzőket nem az idő, hanem a koordináta függvényében vizsgáljuk, akkor a következő megállapításokat tehetjük:

a) a $v=v(x)$ – ábra ellipszis,

b) az $a_e= a_e(x)$ – ábra egyenes szakasz.

Először azt mutatjuk meg, hogy azok a pontok, melyeknek derékszögű koordinátái egy harmonikus rezgő mozgás összetartozó x, v értékei, ellipszisen vannak.

Legyen a mozgásegyenlet az egyszerűség kedvéért

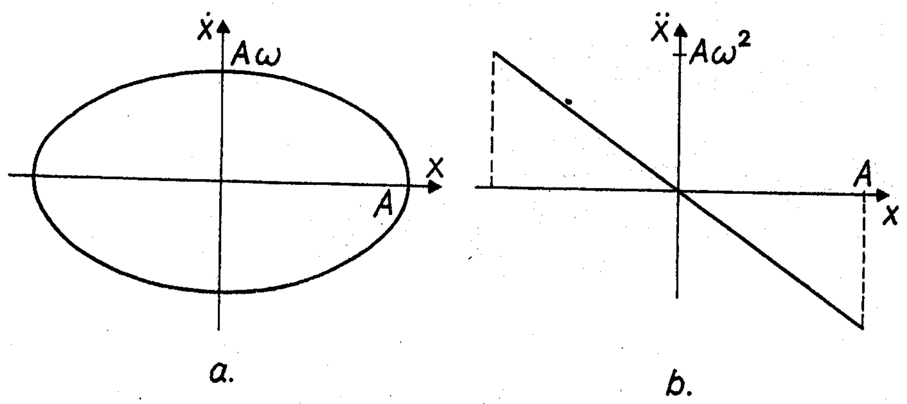
$$x = A\sin\omega t.$$

Ekkor $v^2 = A^2\omega^2\cos^2\omega t = A^2\omega^2(1-\sin^2\omega t) = A^2\omega^2 - \omega^2 x^2$, ebből

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1.$$

Tehát az x,v koordinátájú pontok egy A, $A\omega$ tengelyű ellipszisen vannak (157/a. ábra).

A gyorsulás ábrára vonatkozó állítás pedig az $a_e = -\omega^2 x$, $|x| \le A$ összefüggésekből adódik (157/b. ábra).



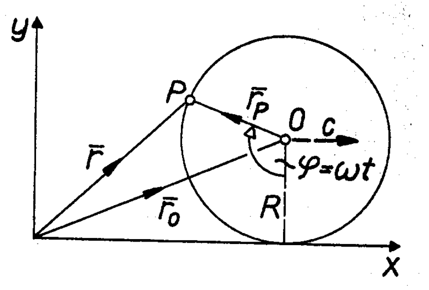
157.ábra

Az egyenes vonalú harmonikus rezgő mozgást származtathattuk volna az $a_e = \ddot{x} = -\omega^2 x = -C\,x$, $(C\rangle 0)$ összefüggésből kiindulva is. Vagyis abból a tulajdonságból, hogy a pályagyorsulás arányos és ellentétes előjelű a koordinátával. A kinetikában gyakran felhasználjuk, hogy az így definiált mozgás periódusa $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{C}}$.

F. Ciklois-mozgás

A következőkben gördülő mozgást végző járműkerekek, ill. kör alakú tárcsák (pl. körfűrészlapok) pontjainak mozgásával foglalkozunk. Gördüljön egy R sugarú körlemez egy derékszögű koordináta rendszer x tengelyén úgy, hogy középpontjának sebessége állandó $\bar{c}$ legyen. t=0-nál a körlemez középpontjának koordinátái legyenek: 0, R és vizsgáljuk azon pontjának mozgását, amely kezdetben egybeesett az origóval (158. ábra)- Egy későbbi időpontban az említett pont helyvektora: $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_p$

$$|\bar{c}| = c \quad \text{jelöléssel:} \quad \bar{r}_0 \begin{cases} ct \\ R \end{cases}.$$



158.ábra

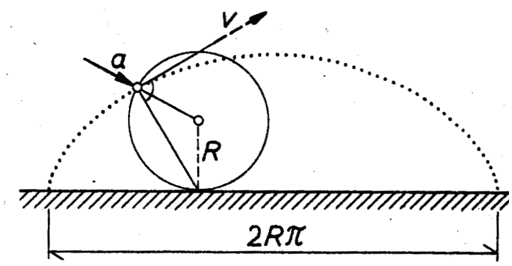
Az $\bar{r}_p$ vektor felírása végett gondoljuk meg, hogy a körlemez mindegyik sugara (így az $\bar{r}_p$ vektorral egybeeső is) egyenlő idők alatt egyenlő szöggel fordul el, vagyis a körlemez sebessége állandó ω érték. $x_O = ct = R\omega t$ a gördülés miatt, tehát $\omega = \frac{c}{R}$. Az $\bar{r}_p$ vektor így a következő lesz:

$$\bar{r}_p \begin{cases} -R\sin\frac{c}{R}t \\ -R\cos\frac{c}{R}t \end{cases}.$$

A mozgásfüggvény tehát:

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{r}_p : \begin{cases} ct - R\sin\frac{c}{R}t \\ R - R\cos\frac{c}{R}t \end{cases}.$$

Ez egy közönséges csúcsos ciklois egyenlete, a mozgás ciklois-mozgás. A sebesség és gyorsulásvektor állását a 159. ábra szemlélteti. A gyorsulásvektor mindig a gördülő kör pillanatnyi középpontjába mutat. A sebességvektorra vonatkozólag később magyarázatot adunk. . Ha a



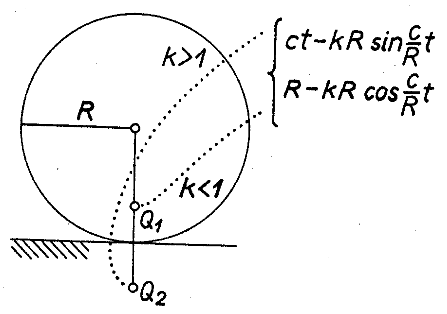
159.ábra

körlemez egy belső Q_1, vagy egy, a körlemezhez rögzített külső Q_2 pontjának pályáját vizsgáljuk, teljesen hasonló megoldással élhetünk, csak R helyett a képletben kR szerepel. Ha k<1, akkor nyújtott, ha k>1 akkor hurkolt cikloist kapunk (160. ábra). Az ábra mellett feltüntettük a görbe paraméteres egyenletrendszerét is.

Ha egy tárcsa középpontjának sebessége c, s a tárcsa haladása közben ω szögsebességgel forog, akkor a nyújtott, ill. hurkolt ciklois-pályákat leíró pontokat elválasztó kör R sugarát az $R = \frac{c}{\omega}$ képlettel számíthatjuk ki.

29. Példa

Határozzuk meg közelítőleg a keretfűrész hajtórúdjában ébredő erőt üresjárat esetén! A közelítés abból fog állni, hogy a fűrészkeret mozgását harmonikus rezgő mozgásnak tekintjük, tehát a mozgást az $x = r\cos t\,\omega$ függvénnyel írjuk le (lásd: 22. és 24. példa). A hajtórudat t=0-nál függőleges helyzetűnek vesszük.



160.ábra

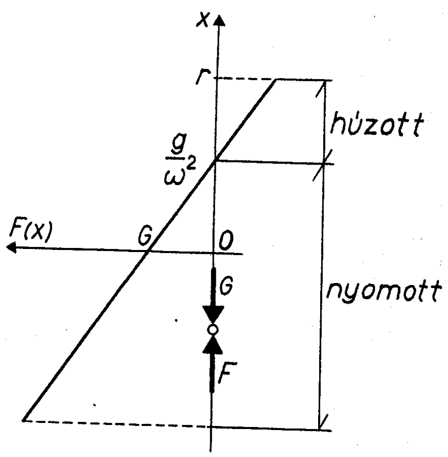
Megoldás.

Legyen a fűrészkeret súlya G, a hajtórúd által a keretre gyakorolt erő F.

Modellezzük a fűrészkeretet egy tömegponttal, mely 0 pont körül r amplitúdójú és ω körfrekvenciájú harmonikus rezgő mozgást végez (161. ábra). A mozgásegyenlet:

$$F - G = \frac{G}{g}\ddot{x} = \frac{G}{g}(-x\omega^2),$$

$$\underline{\underline{F = G\left(1 - \frac{x\omega^2}{g}\right).}}$$



161.ábra

A rúderő tehát lineárisan változik.

A rúd nyomott a $-r \le x < \frac{g}{\omega^2}$ szakaszon,

húzott a $\frac{g}{\omega^2} < x \le r$ szakaszon.

3.6. Faforgácsoló gépek kinematikájának alapjai

RELATÍV MOZGÁSOK

A faforgácsoló gépek forgácsolást végző elemei – fogcsúcs késél – többnyire egyszerű mozgást végeznek a földhöz, az álló gépalaphoz kötött koordináta rendszerben. A pályák általában egyenes szakaszok, körök.

Ha azonban a mozgást – rendszerint mozgó – munkadarabhoz kötött koordináta rendszerben vizsgáljuk, a forgácsoló elemek mozgását jóval bonyolultabbnak találjuk.

Gyakran mégis szükség van arra, hogy a mozgást a munkadarabhoz kötött koordináta rendszerben vizsgáljuk, vagyis a forgácsolást végző elem relatív mozgását tanulmányozzuk.

A faforgácsoló gépek működtetése s az általuk előállított termékek minősége szempontjából egyaránt szükséges e relatív mozgásokkal kapcsolatos kinematikai tények ismerete.

A továbbiakban három jellegzetes esetben vizsgáljuk meg a relatív mozgásokat, a szaktárgyakban sorra kerülő részletes tárgyalás mechanikai előkészítéséül.

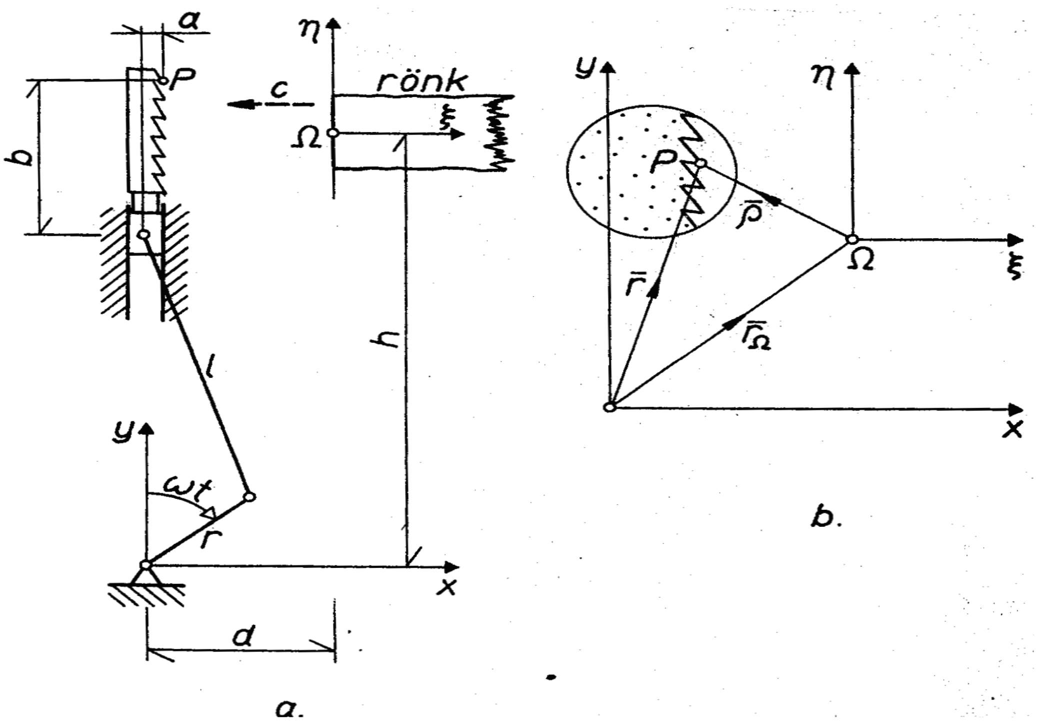
A KERETFŰRÉSZLAP FOGCSÚCSÁNAK RELATÍV MOZGÁSA

Legyen a keretfűrész gépalapjához kötött x,y koordináta rendszerben a fűrészlap P fogcsúcsának mozgása az „abszolút” mozgás, a keretfűrész felé tolt rönkhöz kötött ξ, η koordináta rendszerben vizsgált mozgás a „relatív” mozgás (162/a. ábra). Az ábrán alkalmazott jelölésekkel

$$\bar{r} = \bar{r}_\Omega + \bar{\rho},$$

Illetőleg

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \bar{r}_\Omega .$$



162.ábra

A 162/b. ábra szerint $\bar{\rho}$ a fogcsúcs helyvektora a ξ,η rendszerben. Feltesszük, hogy a rönköt folyamatosan toljuk a gép felé, állandó c sebességgel. Ekkor az előbb említett vektorok a következők:

$$\bar{r}\begin{cases} a \\ r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t} + b \end{cases}, \qquad \bar{r}_\Omega\begin{cases} d - ct \\ h \end{cases},$$

a relatív mozgás törvénye tehát:

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \bar{r}_\Omega : \begin{cases} a - d + ct \\ r\cos\omega t + \sqrt{l^2 r^2 \sin^2\omega t} + b - h \end{cases}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $\sqrt{l^2 r^2 \sin^2\omega t} \approx l$, a közelítő mozgásfüggvény:

$$\bar{\rho}\begin{cases} a - d + ct \\ r\cos\omega t + l + b - h \end{cases}.$$

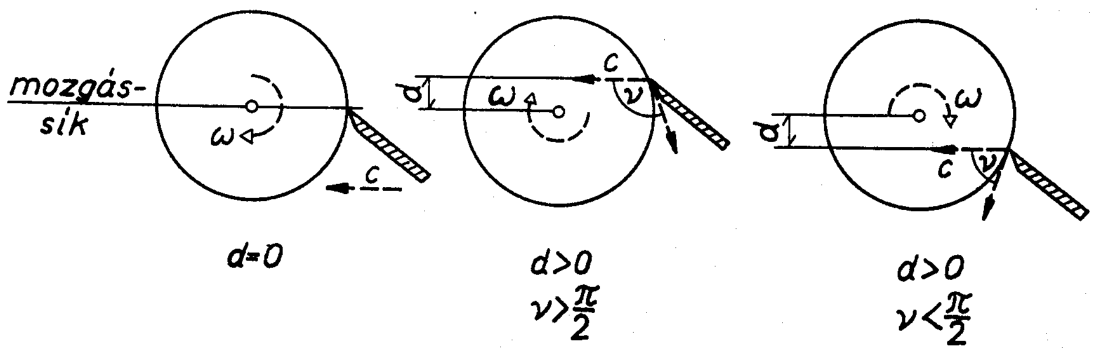
A fogcsúcs relatív pályája tehát általános sinus-vonal. A relatív mozgás sebessége közelítőleg:

$$\dot{\rho}\begin{cases} c \\ -r\omega\sin\omega t \end{cases} .$$

A fogcsúcs a rönkhöz viszonyított sebessége tehát c és $\sqrt{c^2 + r^2\omega^2}$ között ingadozik.

A FURNÉR-HÁMOZÓKÉS RELATÍV MOZGÁSA

Kinetikai szempontból a furnérhámozás lényege a következő: állandó ω szögsebességgel forgatunk egy R sugarú hengert, miközben egy, a henger tengelyével párhuzamos élű kést mozgatunk állandó sebességgel, a henger tengelyével párhuzamos síkban. Kinematikai szempontból a problémát a késél mozgásának vizsgálata jelenti a hengerhez kötött koordináta rendszerben.



163.ábra

A vizsgálat célja polárkoordináta rendszert célszerű alkalmazni. Ha a késél mozgássíkjának a henger tengelyétől mért távolsága d, a késél sebességvektorának és az él támadáspontjának (ez a hengerhez tartozik) sebességvektora által bezárt szög ν (163. ábra), akkor a következő esetek különböztethetők meg:

D=0 ESET

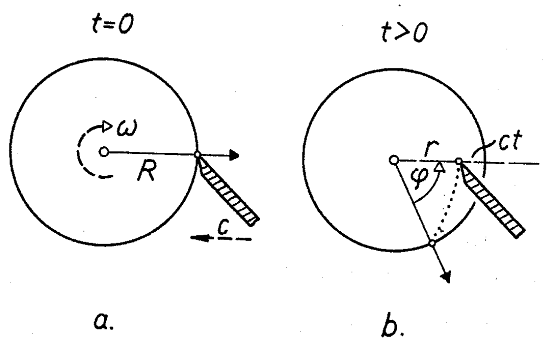
Ez az eset igen egyszerű. A 164. ábráról leolvasható, hogy a hengerrel együtt forgó polárkoordináta rendszerben

$$\underline{\underline{r = R - ct}}, \qquad \underline{\underline{\varphi = \omega t}} .$$

A késél mozgása $T = \frac{R}{c}$ ideig tart.

A mozgásfüggvény $r = r(\varphi)$ alakban a következő:

$$r = R - \frac{c}{\omega}\varphi.$$



164.ábra

A relatív pálya archimedesi spirális. A vágási sebesség komponensei:

$$v_r = \dot{r} = -c, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} = (R - ct)\omega.$$

A vágássebesség abszolút értéke az idő függvényében:

$$v = \sqrt{c^2 + (R - ct)^2 \omega^2}.$$

A sugár függvényében:

$$v = \sqrt{c^2 + r^2\omega^2}.$$

d>0, $\nu < \pi / 2$ ESET.

A 165.ábra alapján először az r=r(t) függvényt írjuk fel:

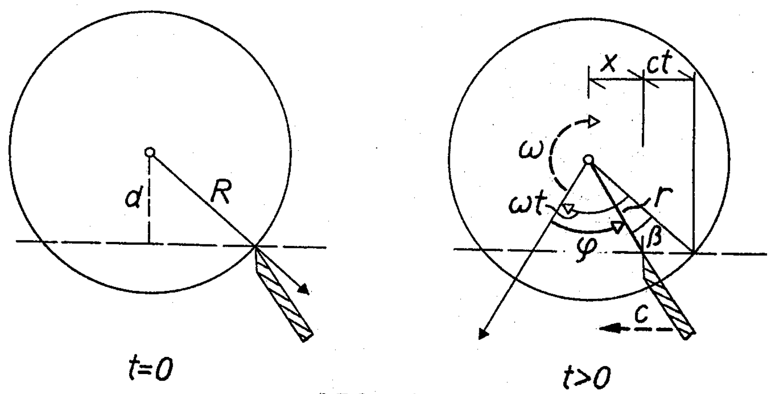
$$r^2 = d^2 + x^2, \qquad x = \sqrt{R^2 - d^2} - ct,$$

$$r = \sqrt{d^2 + \left(\sqrt{R^2 - d^2} - ct\right)^2}$$

$$r = \sqrt{R^2 - 2ct\sqrt{R^2 - d^2} + c^2t^2}.$$

A $\varphi = \varphi(t)$ szög így számítható:

$$\varphi = \omega t - \beta, \quad \beta = \arccos\frac{d}{R} - \arccos\frac{d}{r},$$



165.ábra

$$\varphi = \omega t - \arccos\frac{d}{R} + \arccos\frac{d}{\sqrt{R^2 - 2ct\sqrt{R^2 - d^2} + c^2t^2}} .$$

$\nu \rangle \pi/2$ ESET

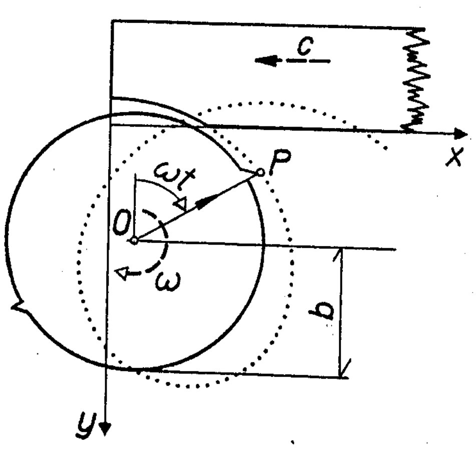
Hasonlóan intézhető el, mint a $\nu \langle \pi/2$ eset, φ képletében jelentkezik csupán előjel-különbség. Figyelemre méltó, hogy azonos d esetén két különböző alakú relatív pálya adódik.

A GYALUGÉP VÁGÓÉLÉNEK RELATÍV MOZGÁSA

A gyalugép vágó-élének és a körfűrészlap fogcsúcsának relatív pályája (a faanyaghoz kötött koordináta-rendszerben) teljesen hasonló gondolatmenettel határozható meg, mint amelyet a ciklois mozgásnál követtünk.

A gyalugép forgórésze (166. ábra) a tengely körül ω szögsebességgel forog, miközben a munkadarab c sebességgel halad előre. A vágó-él valamely pontjának pályáját a munkadarabhoz kötött x, y koordináta rendszerben vizsgáljuk.

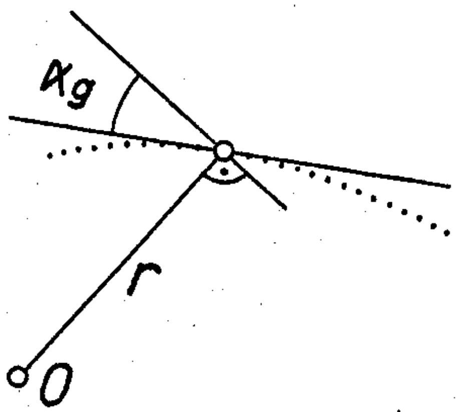
A ciklois mozgásnál szerepelt három vektornak most a következők felelnek



166.ábra

meg: $\bar{r}_0 \begin{cases} c\,t \\ b \end{cases}$, $\quad \bar{r}_p \begin{cases} R\sin\omega t \\ -R\cos\omega t \end{cases} \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_p = \begin{cases} c\,t + R\sin\omega t \\ b - R\cos\omega t \end{cases}$.

Most c és ω között nem áll fenn a $c=R\omega$ kapcsolat. A relatív pályagörbe hurkolt ciklois.



167.ábra

30. példa

Furnérhámozásnál bizonyos jelentősége van a kinematikai hátszögnek. Ez a relatív pályagörbe valamely érintője s az érintési ponthoz tartozó sugár normálisának szöge. A szakirodalom α_g-vel jelöli. (167.ábra)

Határozzuk meg ezt a szöget archimedesi spirális, vagyis d=0 esetén.

Megoldás.

A sebességvektor polár-koordinátás felbontásából leolvasható, hogy

$$\mathrm{tg}\alpha_g = \left|\frac{v_r}{v_\varphi}\right| = \frac{c}{(R-ct)\omega}.$$

Szükség lehet a kinematikai hátszög és a h furnérvastagság közti kapcsolatra is. Ha T a forgás periódusa, $h = cT = c\frac{2\pi}{\omega} \cdot c - t$ visszahelyettesítve és figyelembe véve, hogy R-ct=r,

$$\underline{\underline{\alpha_g = \mathrm{arctg}\frac{h}{2\pi r}}}.$$

3.7. Munka, teljesítmény, energia

Néhány további fogalom bevezetésével olyan tételekhez juthatunk, melyek feladatok során gyakran előnyösebben használhatók, mint az alapegyenlet.

MECHANIKAI MUNKA

Ha egy tömegpontra állandó F erő hat, miközben a tömegpont elmozdulás vektora $\Delta\bar{r}$, akkor az erő által végzett mechanikai munka

$$W = \bar{F}\Delta\bar{r} = |\bar{F}||\Delta\bar{r}|\cos\varphi \qquad (\mathrm{kg.m^{2}.s^{-2}})$$

(φ a két vektor által bezárt szög)

A munka mértékegysége 1 joule= 1 Nm, jele: J.

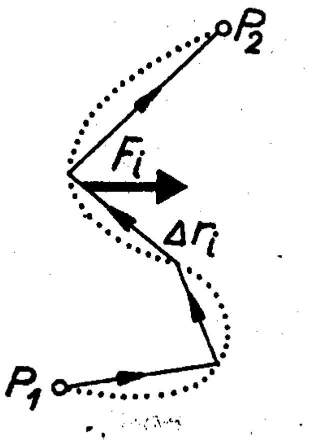
Ez a skaláris mennyiség pozitív, zérus, vagy negatív lehet, eszerint, amint az erő- és elmozdulás-vektor szöge hegyes- derék- vagy tompaszög.

Ha $\Delta\bar{r}$ elmozdulás során F_1, F_2,…,F_n állandó erők hatnak a tömegpontra, akkor

$$W = \bar{F}_1\Delta\bar{r} + \bar{F}_2\Delta\bar{r} + \ldots + \bar{F}_n\Delta\bar{r} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n)\Delta\bar{r} = \bar{F}\Delta\bar{r}.$$

Tehát az eredő munkája egyenlő az összetevők munkáinak algebrai összegével.

Általános esetben, mikor a tömegpont valamilyen görbe vonalon jut el az $\bar{r}_1$ helyvektorú P_1 pontból az $\bar{r}_2$ helyvektorú P_2 pontba és közben $\overline{F}$ is változik, a mechanikai munka értelmezése a következő. A P_1, P_2 görbedarabot n részre osztjuk úgy, hogy az osztópontok egy P_1-től P_2-be vivő vektorsokszög szögpontjai legyenek (168. ábra). Ha elég sűrű a görbedarab felosztása, akkor a vektorsokszöget alkotó elmozdulás vektorok jól megközelítik a pályagörbét és az



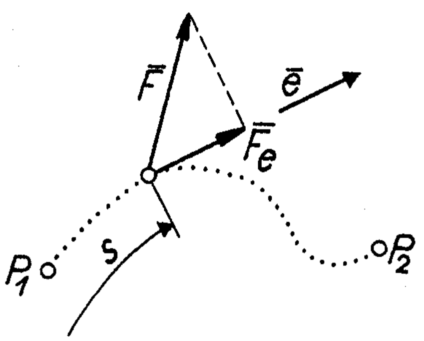
168.ábra

$\overline{F}_1\Delta\bar{r}_1 + \overline{F}_2\Delta\bar{r}_2 + ... + \overline{F}_n\Delta\bar{r}_n$ összeg tekinthető a változó F erő munkája közelítő értékének, midőn F támadáspontja P_1-ből P_2-be jut.

Itt $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...,$ a $\Delta\bar{r}_1, \Delta\bar{r}_2, ...$ elmozdulás vektorhoz tartozó és egy-egy szakaszon állandónak vehető vektor. Ezek után a munka definícióját így adhatjuk meg:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta\bar{r}_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} \overline{F}_i\Delta\bar{r}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}(F_{x_i}\Delta x_i + F_{y_i}\Delta y_i + F_{z_i}\Delta z_i) =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \overline{F} d\bar{r}, \qquad \bar{r}_1(x_1, y_1, z_1), \qquad \bar{r}_2(x_2, y_2, z_2).$$

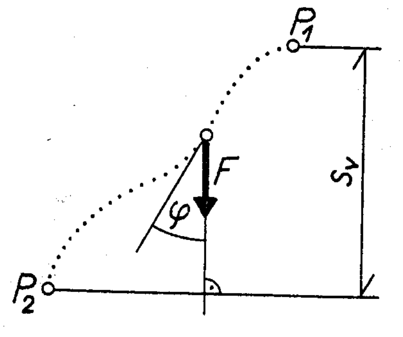


169.ábra

Ha az F erőt a pálya érintőjébe eső F_e és arra merőleges összetevőre bontjuk fel (169. ábra), akkor az F erő ds úton végzett elemi munkáját az F_e összetevő munkája adja. Ha az F_e=F_e(s) függvény – vagyis az érintőleges komponens az ívkoordináta függvényében – ismert, akkor az s_1, ill. s_2 ívkoordinátájú P_1, ill. P_2 pontok között végzett munka:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_e(s)ds.$$

Speciálisan, ha az erő támadáspontjának pályája görbe vonal és az erő vektora állandó (170. ábra), akkor a munka:



170.ábra

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\varphi \cdot ds = F\int_{s_1}^{s_2} \cos\varphi \cdot ds = Fs_v,$$

s_V : a pályaszakasz vetületének előjeles hossza.

MECHANIKAI TELJESÍTMÉNY

A munkavégzés sebességének jellemzésére vezetjük be a mechanikai teljesítmény fogalmát. Valamely t idő alatt ΔW munkát végző erő átlagos teljesítménye:

$$P_{\acute{a}tl} = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Az erő- és munkagépeknél általában ezzel számolnak.

Az átlagteljesítmény $\Delta t \to 0$ -ra adódó határértéke a pillanatnyi teljesítmény:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Ez a skaláris mennyiség pozitív, zérus vagy negatív lehet. A teljesítmény mértékegysége az 1 watt, jele W.

$$1W = 1J \cdot s^{-1} = 1m^2 \cdot s^{-3} \cdot kg.$$

Nagyobb egység a kilowatt=1000 watt.

A teljesítmény fontos kifejezéséhez juthatunk el a következőképpen:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{\overline{F}\cdot d\overline{r}}{dt}=\overline{F}\,\overline{v}=F_x\dot{x}+F_y\dot{y}+F_z\dot{z}$$

Ha ismert pálya adataival kívánunk dolgozni, a $_2$

$$P=F_e v$$

Képlettel is számolhatunk, ahol v a pályasebesség.

Ha a tömegpontra több erő hat, az eredő erő teljesítménye egyenlő az összetevő erők teljesítményeinek algebrai összegével. Ugyanis ha az összetevők $\overline{F}_1,...,\overline{F}_n$, az eredő $\overline{F}$, a sebesség $\overline{v}$:

$$\overline{F}_1\overline{v}+\overline{F}_2\overline{v}+...+\overline{F}_n\overline{v}=(\overline{F}_1+\overline{F}_2+...+\overline{F}_n)\overline{v}=\overline{F}\overline{v}\,.$$

A teljesítmény és a munka közötti kapcsolata következő: ha W jelöli az erő által a t_1, t_2 időközben végzett munkát, akkor

$$W=P\cdot dt=\overline{F}\,\overline{v}\cdot dt,$$

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\left[F_x(t)\dot{x}(t)+F_y(t)\dot{y}(t)+F_z(t)\dot{z}(t)\right]dt.$$

MECHANIKAI HATÁSFOK

A gépek működése közben a befektetett W_b munka egy része nem az eredeti célra, hanem különféle ellenállások leküzdésére fordítódik. Ha ezt a veszteséget W_v-vel jelöljük, akkor a gép rendeltetése szempontjából hasznos munka

$$W_h = W_b - W_v\,.$$

A gépek gazdaságosságát jellemzi a mechanikai hatásfok:

$$\eta=\frac{W_h}{W_b}\,.$$

A hatásfok 1-nél kisebb, dimenzió nélküli szám.
A hatásfok más formában:

$$\eta = \frac{W_h}{W_b} = \frac{W_b - W_v}{W_b} = 1 - \frac{W_v}{W_b}.$$

Kifejezhetjük a hatásfokot a teljesítménnyel is, ha a fenti törtek számlálóját és nevezőjét az idővel elosztjuk:

$$\eta = \frac{P_h}{P_b} = \frac{P_b - P_v}{P_b} = 1 - \frac{P_v}{P_b},$$

Ahol P_b, P_h, P_v a befektetett, hasznos teljesítmény, ill. teljesítmény-veszteség.

Ha egy hajtómű hatásfoka η_1 és a hajtóművel egy η_2 hatásfokú gépet működtetünk, akkor a második géppel közölt teljesítmény $P_b^2 = \eta_1 P_b^1$, így a rendszer hatásfoka: $\eta = \frac{\eta_2 \eta_1 P_b^1}{P_b^1} = \eta_1 \eta_2$.

Általában $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ hatásfokú gépekből álló rendszer esetén az összhatásfok:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 ... \eta_n .$$

MECHANIKAI ENERGIA

Az m tömegű, $\bar{v}$ sebességű tömegpont kinetikai energiáját így értelmezzük:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^{-2} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m\dot{s}^2} .$$

Ez a munka jellegű skaláris mennyiség, mértékegységei azonosak a munka mértékegységeivel.
Ha az m tömegű, zérus-sebességű anyagi pontot v sebességűre gyorsítjuk, a gyorsító erő munkája $\frac{1}{2} m v^2$.

A kinetikai energia t, s, v –szerinti deriváltjainak kinetikai jelentésük van, ugyanis:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}mv^2}{dt} = \frac{1}{2}2mv\frac{dv}{dt} = mv\frac{F_e}{m} = P,$$

$$\frac{dE_k}{ds} = \frac{1}{2}2mv\frac{dv}{ds} = mv\frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds} = mva_e\frac{1}{v} = F_e,$$

$$\frac{dE_k}{dv} = \frac{1}{2}2mv = mv.$$

31. Példa

Számítsuk ki a fűrészkeret kinetikai energiáját

a) az idő függvényében,
b) b) az ívkoordináta (kitérés) függvényében.

Egyszerűség kedvéért tekintsük x=r cos ωt törvényű harmonikus rezgő mozgásnak a fűrészkeret mozgását. A keretfűrész tömege m, a forgattyú sugara r, a forgattyú szögsebessége ω.

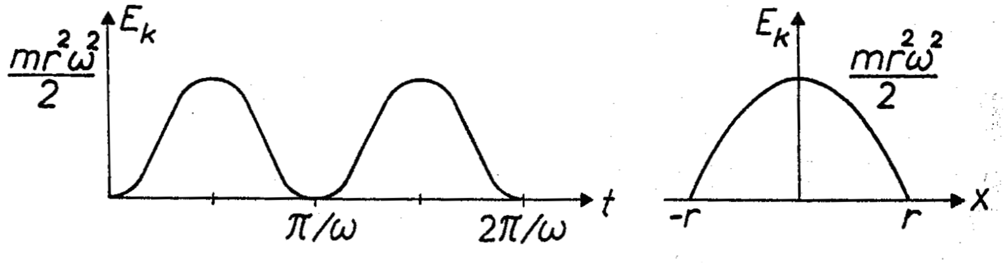
Megoldás.

A fűrészkeret sebessége v=- $r\omega$ sin ωt, így íz energia:

a) $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-r\omega\sin\omega t)^2, \qquad \underline{\underline{E_K = \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\omega t}}$

b) $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-r\omega\sqrt{1-\cos^2\omega t})^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2(1-\frac{x^2}{r^2}), \quad \underline{\underline{E_K = \frac{1}{2}m\omega^2(r^2-x^2)}}.$

Az energia változását t, ill. x függvényében a 171. ábra szemlélteti.

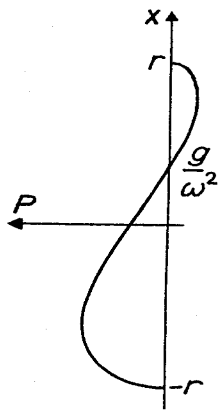


a. **b.**

171.ábra

32. Példa

Számítsuk ki az előző példában szereplő keretfűrész hajtórúdjában ébredő erő teljesítményét a koordináta függvényében.Megoldás. A 29. Példa ábrája és eredménye alapján számolhatunk. Változzék x -r-től +r-ig.



172.ábra

$$P = P(x) = Sv = G(1 - \frac{x\omega^2}{g})(-r\omega \sin \omega t) = G r\omega(\frac{\omega^2}{g}x - 1)\sqrt{1 - \cos^2 \omega t}.$$

$$\underline{\underline{P(x) = Gr\omega(\frac{\omega^2}{g}x - 1)\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}.}}$$

A függvényt a 172. ábra szemlélteti.

3.8. Kinetikai tételek

EGYETLEN TÖMEGPONTRA VONATKOZÓ TÉTELEK

A tömegpontra ható erő F_e érintőleges komponense és a pályasebesség között az alapegyenlet értelmében fennáll az $F_e = m\frac{dv}{dt}$ összefüggés, melyből a tömegpont mv mozgás mennyiségének megváltozása:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_e(t)dt.$$

Általánosabban, ha t_1 időpontban az m tömegű anyagi pont sebessége $\bar{v}_1, t_2$ időpontban $\bar{v}_2$, s a tömegpontra ható erő $\bar{F}(t)$, akkor érvényes a következő

<u>**Tétel**</u> (impulzustétel):

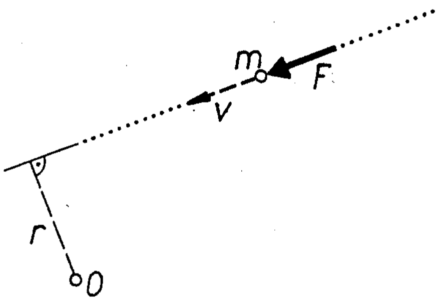
$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t)\,dt.$$

A tétel alapján, az erő ismeretében következtethetünk a sebességváltozásra, ill. kiolvasható a tételből, hogy a mozgásmennyiségnek rövid időn belüli nagy változását (ütközés) nagy erő idézi elő. Az $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t)dt$ mennyiséget <u>lökés</u>nek vagy <u>impulzus</u>nak nevezik.

A tömegpont kinetikai energiájának az ívkoordináta szerint deriváltja - mint láttuk - :

$$\frac{dE_k}{ds} = \frac{d}{ds}(\frac{1}{2}mv^2) = F_e \text{, amiből}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{s_1}^{s_2} F_e(s)ds = W.$$



173.ábra

Általánosabban, ha t_1 időpontban az m tömegű anyagi pont sebessége $\bar{v}_1, t_2$ időpontban $\bar{v}_2$, s a tömegpontra ható erő munkája a vizsgált időközben W, akkor érvényes a következő

<u>**Tétel**</u> (munkatétel):

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F}(\bar{r})d\bar{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_e(s)ds = W.$$

Ez a tétel – éppen úgy, mint az előző – a kinetika alaptételének következménye. Az alaptételnél kevesebbet mond, mert a tömegpontra ható erők eredőjének normális komponensét nem tartalmazza. Különösen olyankor alkalmazható előnyösen, mikor a tömegpont sebességét keressük az ismert pálya egyes helyein.

A tétel értelmében, ha a pályasebesség – s így a kinetikai energia – nem változik meg, akkor az erők összmunkája zérus. Legyen a síkban mozgóm tömegű pont sebessége v, a pontra ható erő F és a pálya egyenesének távolsága a tetszőleges 0 pontról r. Ekkor $F = m\frac{dv}{dt}$, ill. mindkét oldalt r-rel szorozva $rF = rm\frac{dv}{dt} = d\frac{rmv}{dt}$.

$rF = M_0$ az erőnek, rmv= Π_0 pedig a mozgásmennyiségnek 0-ra vonatkozó nyomatéka. Fennáll tehát a következező összefüggés:

$$M_0 = \frac{d\Pi_0}{dt}, \text{ ill. } \quad \Pi_2 - \Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} M(t)dt.$$

Általánosabban is érvényes tételhez juthatunk a következőképpen: legyen az 0 nyomatékvonatkoztatási pont egy derékszögű koordináta rendszer kezdőpontja, s legyen az m tömegű pont helyvektora $\bar{r}$, sebessége $\bar{v}$, akkor a tömegpont mozgásmennyisége $m\bar{v}$, ennek 0-ra vonatkozó perdülete $\bar{r}xm\bar{v}$. A perdület valamely tengelyre is számítható, például az x tengelyre $\Pi_x = m(y\dot{z})$. Legyen végül a tömegpontra ható erő 0-ra vonatkozó nyomatéka $\overline{M}$, ekkor érvényes a következő

Tétel (perdület-tétel):

$\frac{d\overline{\Pi}_0}{dt} = \overline{M}_0$, ill. ha t_1, t_2 időpontban a perdület $\overline{\Pi}_1$, ill. $\overline{\Pi}_2$, akkor

$$\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overline{M}(t)\,dt.$$

A tételből kiolvasható, hogy a perdület nem változik meg, ha a tömegpontra ható erők 0-ra vonatkozó nyomatéka zérus. A tétel hasznosságáról a továbbiakban győződhetünk meg.

TÖMEGPONT-RENDSZERRE VONATKOZÓ TÉTEL

Több tömegpontból álló rendszer esetén a rendszer tömegközéppontját így értelmezzük:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i},$$

ahol $\bar{r}_i$ az i-edik tömegpont helyvektora, m_i a tömege. A tömegközéppont – bár elvileg különbözik – a műszaki gyakorlat szemszögéből azonosnak vehető a rendszer pillanatnyi súlypontjával.

Tétel: A tömegpontrendszer tömegközéppontjának mozgásmennyisége egyenlő a rendszert alkotó tömegpontok mozgásmennyiségeinek vektorális összegével:

$$m\bar{v}_c = \sum m_i \bar{v}_i, \quad \text{ahol} \quad m = \sum m_i .$$

Tétel: (a tömegközéppont tétele): ha a tömegpontrendszer tömegközéppontjának gyorsulása $\bar{a}_c$, a rendszerre ható külső erők (a rendszerhez nem tartozó testek hatásai) vektorális összege $\sum \bar{K}_i = \bar{K}$ akkor

$$\bar{K} = m\bar{a}_c .$$

A tömegközéppont mozgását ezek szerint a rendszer sebességállapota és a külső erők szabják meg.

A tétel fontos speciális esete: ha $\bar{K} = 0$, akkor $\bar{a}_c = 0$, $\bar{v}_c = \text{const.}$ vagyis, ha a külső erők összege zérus, akkor a rendszer mozgásmennyisége állandó, a tömegközéppont állandó sebességű mozgást végez vagy nyugalomban van.

Általánosíthatjuk a korábban megismert munka- és perdület-tételt is. A tömegpontrendszer kinetikai energiáját a rendszert alkotó elemek kinetikai energiájának algebrai összegezésével nyerjük. A tömegpontrendszerre ható erők munkája hasonlóan számítható. Figyelembe veendő azonban, hogy általában a belső erők végezhetnek munkát, amennyiben nem merev testről van szó.

Ha a tömegpontrendszer elemeire a munkatételt alkalmazzuk, s az egyenlőségeket összegezzük, akkor a rendszerre vonatkozólag érvényes munkatételhez jutunk:
Tétel (munkatétel): a tömegpontrendszer kinetikai energiájának megváltozása egyenlő a rendszerre ható (külső és belső) erők munkájával:

$$\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_{i2}^{\,2} - \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_{i1}^{\,2} = W_b + W_k,$$

W_b : a belső erők munkája
W_k : a külső erők munkája.

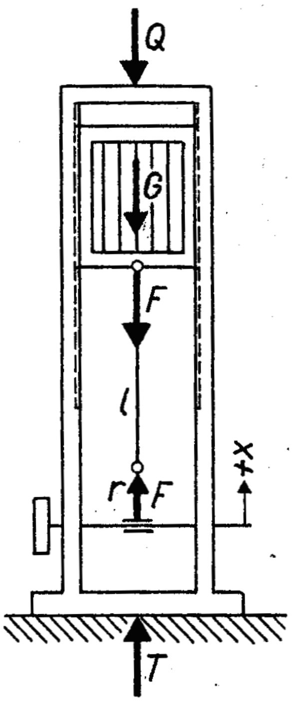
Merev test esetében csak a külső erők munkájával számolunk. A tömegpontrendszernek egy fix pontra vonatkozó perdületén az egyes tömegpontok perdületeinek vektorális összegét értjük.

Tétel (perdület-tétel): a tömegpontrendszer valamely fix 0 pontra (tengelyre) vonatkozó perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő a külső erők ugyanazon pontra (tengelyre) vonatkozó nyomaték összegével:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum (\bar{r}_i x \bar{K}_i) = \bar{M}\,.$$

A tétel értelmében a perdület megváltozását csak külső erők okozhatják, a belső erők ilyen szempontból hatástalanok. A későbbiekben hivatkozni fogunk arra a tényre, hogy a perdület-tétel akkor is érvényes, ha nyomatékvonatkoztatási pontul a tetszőlegesen mozgó tömegközéppontot választjuk.

33. Példa



174.ábra

A 174. ábrán egy keretfűrészt ábrázoltunk egyszerűsítve. A forgattyúkar hossza r, a hajtórúdé l, a forgattyú szögsebessége ω, az állvány és a keret súlya Q ill. G. Számítsuk ki a T támasztó erő nagyságát a keret szélső helyzeteiben.

Megoldás.

Alkalmazzuk a pontrendszerekről tanultakat az állványból és a keretből álló rendszerre! Külső erők: Q, G, T; belső erők: az F jelűek. A rendszer súlypontjának sebessége (ha feltesszük, hogy a keret x=l+r sinωt törvény szerint mozog):

$$v_c = \frac{1}{m}\sum m_i v_i = \frac{g}{Q+G}\frac{G}{g} r\omega \cos \omega t\,.$$

A súlypont gyorsulása:

$$a_c = \frac{-Gr}{Q+G}\omega^2 \sin \omega t,$$

a felső helyzetben

$$a_c = \frac{-Gr}{Q+G}\omega^2\,.$$

A súlyponttétel értelmében:

$$T - Q - G = \frac{Q+G}{g}\left(-\frac{Gr}{Q+G}\omega^2\right), \qquad \underline{\underline{T = Q + G\left(1 - \frac{r\omega^2}{g}\right).}}$$

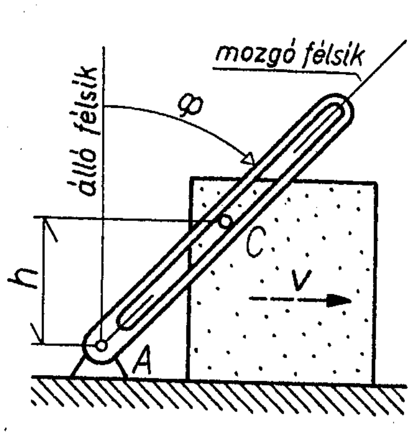
A képletből kiolvasható, hogy elegendő nagy fordulatszámnál a T erő iránya megfordulhat. Az alsó helyzetben:

$$\underline{\underline{T = Q + G\left(1 + \frac{r\omega^2}{g}\right).}}$$

3.9. A forgó mozgás kinematikája

A továbbiakban kizárólag merev testekkel foglalkozunk. A merev test egyik legfontosabb mozgástípusa a forgó mozgás. Forgó mozgást végez a test, ha két pontja (esetleg a test alkalmas kiegészítésével nyerhető testté) a mozgás következtében nyugalomban marad. A két pontot összekötő (irányított) egyenes a test forgástengelye. A testnek a forgástengelyhez tartozó pontjai nyugalomban vannak, a többi pontja a forgástengelyre merőleges síkú körökön mozog. A körközéppontok a forgástengelyre esnek.

A mozgás leírásához felveszünk egy fix és egy a testtel együtt mozgó fél-síkot, melynek határ egyenese a forgástengely, előjeles szögét. Pontosabban a $\varphi = \varphi(t)$ függvényt, mely a φ szögkoordinátának az időben történő változását írja le. Az elmondottak szemléltetésére nézzük az alábbi feladatot.



175.ábra

A 175. ábrán látható hasáb állandó v sebességgel mozog jobbra, s a hasítékkal ellátott, s az A pont körül forgatható rudat a C csapszeg segítségével elmozgatja.

Határozzuk meg a rúdforgó mozgását leíró $\varphi = \varphi(t)$ függvényt! A forgástengely most az A pontban a papír síkjára merőleges tengely, a fix fél-sík az alapsíkra merőleges, a testhez kötött fél-sík a rúd szimmetria síkja.

T= 0-nál, φ =0, t idő alatt a C pont vt távolságra mozdul el, tehát $\operatorname{tg}\varphi = \frac{vt}{h}$,

következésképpen $\underline{\underline{\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{h} t.}}$

A pont kinematikájában követett módon bevezethetjük a forgó mozgást végző test skaláris szögsebességét és skaláris szöggyorsulását a következő módon:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(s^{-1}),$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\beta\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{t} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}(s^{-2}).$$

A műszaki gyakorlatban az egyenletesen forgó géprészek forgássebességét gyakran nem a skaláris szögsebességgel, hanem a fordulatszámmal jellemzik.

A másodpercenkénti fordulatszám jele n, mértékegysége: s^{-1}. A szögsebesség és fordulatszám közötti összefüggés: $\omega = 2\pi n$. Használatos a nem SI-egység percenkénti fordulatszám is. A fix tengely körül forgó merev test bármely pontjának pályasebességét és gyorsuláskomponensét könnyen belátható módon így számíthatjuk ω, β és az R forgássugár ismeretében:

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega, \qquad a_e = R\ddot{\varphi} = R\beta, \qquad a_n = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2 = v\omega.$$

A tömegpont és a forgó mozgás kinematikája között analógia áll fenn. Ezt világítja meg az alábbi táblázat:

A tömegpont mozgása	*A merev test forgó mozgása*
Állandó pályasebességű mozgás	*Állandó szögsebességű forgó mozgás*
S= s_0+ct $c \neq 0$: állandó	$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \omega \neq 0$: állandó
$\dot{s} = v = c$	$\dot{\varphi} = \omega$
$\ddot{s} = a_e = 0$	$\ddot{\varphi} = \beta = 0$
Állandó pályagyorsulású mozgás	*Állandó szöggyorsulású mozgás*
$s = s_0 + ct + \frac{1}{2}a_e t^2, \quad c, a_e$: állandó, $a_e \neq 0$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2 \quad \omega, \beta$: állandó, $\beta \neq 0$
$\dot{s} = v = c + a_e t,$	$\dot{\varphi} = \omega + \beta t,$
$\ddot{s} = a_e.$	$\ddot{\varphi} = \beta.$

További hasonlóságokra is rámutathatnánk és megtárgyalhatnánk a forgó mozgással kapcsolatos kinematikai alapfeladatokat is. Matematikailag azonban ezek nem különböznek a tömegpont kinematikájában látottaktól.

Végül megemlítjük, hogy megadható a szögsebesség és a szöggyorsulás vektorális értelmezése is.

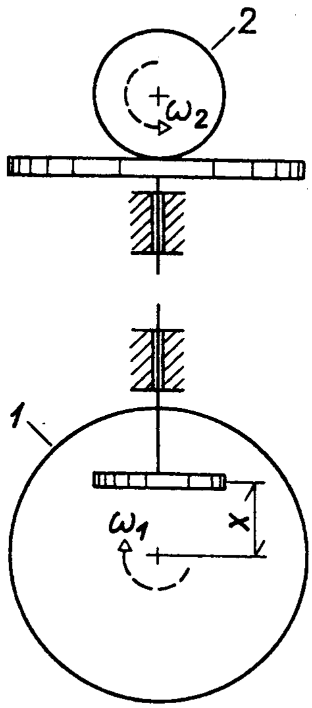
34. Példa

A keretfűrész ún. előtoló-művének működésével kapcsolatos az alábbi probléma. A 176. ábrán látható, egymással csúszásmentes kapcsolatban lévő 1 és 2 jelű tárcsák szögsebessége ω_1, ill. ω_2.

Határozzuk meg:

a) az $\omega_2 = \omega_2(x)$ szögsebességet, ha ω_1 állandó,

b) az $\omega_1 = \omega_1(x)$ szögsebességet, ha ω_2 állandó.



176.ábra

Megoldás.

A kerületi sebességek egyenlőségéből:

a) $\omega_1 x = R_2\omega_2$, $\underline{\underline{\omega_2 = \frac{\omega}{R_2}x}}$

b) $\omega_1 x = R_2\omega_2$, $\underline{\underline{\omega_1 = \frac{R_2}{x}\omega_2}}$.

35. Példa

Egy gyalugép tengelyének mozgásfüggvénye: $\varphi = \omega t + k\sin\omega t$, ahol ω a géptengely átlagos szögsebessége, k állandó. A szögsebesség átlagértékétől való maximális eltérés $0{,}01\,\omega$. Határozzuk meg a k állandót, valamint a szöggyorsulás szélső értékeit, ha a percenkénti fordulatszám n = 3 000 $\frac{1}{\min}$.

Megoldás.

Az átlagos szögsebesség: $\omega = \frac{\pi n}{30} = 100\pi\frac{1}{s}$.

A szögsebesség: $\dot{\varphi} = \omega + k\omega\cos\omega t = \omega(1 + k\cos\omega t)$, ennek legnagyobb értéke: $\omega(1+k) = 1{,}01\omega$, $\underline{\underline{k = 0{,}01.}}$

A szöggyorsulás: $\ddot{\varphi} = k\omega^2(-\sin\omega t)$.

A maximum: $\underline{\underline{\ddot{\varphi}_{max} = 100\pi^2\frac{1}{s^2}}}$, a minimum: $\ddot{\varphi}_{min} = -100\pi^2\frac{1}{s^2}$.

3.10. Testek tehetetlenségi nyomatékai

A forgó mozgás kinematikájának tárgyalását egy a későbbiekben gyakran előforduló mennyiség vizsgálatával készítjük elő.

A TEHETETLENSÉGI NYOMATÉK FOGALMA

Valamely testnek egy tetszőleges x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a

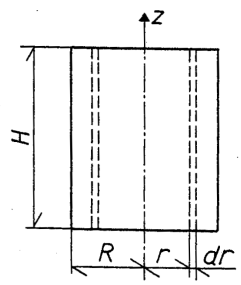
$$\Theta_x = \int_{(V)} r^2 dm \qquad kgm^2)$$

Skaláris mennyiség, ahol r a test dm tömegű elemének távolsága a tengelytől. Matematikailag a síkidom másodrendű nyomatékához hasonló fogalomról van szó, tehát egy olyan összeg határértékéről, melyben a test elemeinek Δm_i tömege és ezen elemekben felvett pontok tengelytávolságai négyzetének szorzata szerepel, miközben a felosztás minden határon túl finomodik s az integrálás a test teljes V térfogatára terjed ki.

Hasonlóan értelmezhető a koordináta-rendszer többi tengelyére, kezdőpontjára vagy koordináta-síkjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték is, pl. Θ_0 a kezdőpontra, Θ_{zz} az x, y síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_0 = \int_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dm, \qquad \Theta_{zz} = \int_{(V)} z^2 dm.$$

A tehetetlenségi nyomaték csak a test geometriai adataitól és tömegeloszlásától függ. A továbbiakban homogén testekkel foglalkozunk.



177.ábra

Példaképpen kiszámítjuk egy R sugarú, H magasságú, ρ sűrűségű forgáshengernek a forgástengellyel egybeeső z koordináta-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. A testet közös tengelyű forgáshenger felületekkel r, illetve r+dr sugarú „csövekre” osztjuk .

(177. ábra). Egy ilyen elem tehetetlenségi nyomatéka

$$dm \cdot r^2 = \rho 2r\pi \cdot dr \cdot Hr^2.$$

Az elemek tehetetlenségi nyomatékait összegezve a keresett érték:

$$\Theta_z = \rho 2\pi H \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4},$$

vagy a test m tömegével kifejezve:

$$\underline{\underline{\Theta_z = \frac{1}{2} mR^2.}}$$

A fontosabb restek tehetetlenségi nyomatékát táblázatok tartalmazzák.

Az anyagi testnek egy térbeli derékszögű koordináta-rendszer két-két tetszőleges síkjára vonatkozó <u>centrifugális</u> vagy <u>deviációs</u> <u>nyomaték</u>án a

$$\Theta_{xy} = \int_{(V)} xydm, \quad \text{ill.} \quad \Theta_{xz} = \int xzdm, \qquad \Theta_{yz} = \int_{(V)} yzdm \qquad (m^2kg)$$

mennyiséget értjük. Ez – ellentétben a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékkal – negatív is lehet.

Az <u>inerciasugár</u> értelmezése: ha egy test tömege m, valamely tengelyre (síkra) vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka Θ, akkor az inerciasugár az az i távolság, melyre

$$\Theta = mi^2.$$

TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKKAL KAPCSOLATOS TÉTELEK

A síkidom másodrendű nyomatékai s a testek tehetetlenségi nyomatékai között fennálló analógia kitűnik az alábbi tételekből is.

Tétel: Egy test valamely tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenlő két olyan síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték összegével, melyek egymást a megadott tengelyben metszik, egymásra merőlegesek, de egyébként tetszőleges helyzetűek. A síkidomok másodrendű nyomatékaira vonatkozó Steiner-tételnek a testek esetében a következő tételek felelnek meg:

a) Ha egy testnek egy tetszőleges S síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka Θ_S, a síkkal párhuzamos s a test súlypontján átmenő $\sum$ síkra Θ_Σ, továbbá a két sík egymástól mért távolsága d és a test tömege m, akkor

$$\Theta_S = \Theta_\Sigma + md^2.$$

Két párhuzamos tengelyre, melyek közül az egyik súlyponti tengely, hasonló tétel igaz.

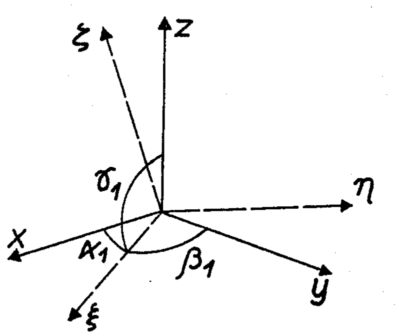
b) Ha egy testnek egy x,y,z derékszögű koordináta-rendszer két koordináta-síkjára vonatkozó deviációs nyomatéka Θ_{xy}, a test súlypontjában felvett párhuzamos helyzetű ξ, η, ς koordináta-rendszerre vonatkozó deviációs nyomatéka $\Theta_{\xi\eta}$, akkor

$$\Theta_{xy} = \Theta_{\xi\eta} + mx_S y_S \qquad (x_S, y_S : \text{súlypont-koordináták}).$$

FŐTENGELYEK

Ha egy térbeli koordináta-rendszerre vonatkozólag $\Theta_{xy} = 0$, $\Theta_{yz} = 0$ a tengelyeket a test főtehetetlenségi tengelyeinek, a hozzájuk tartozó $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ értékeket főtehetetlenségi nyomatékoknak nevezik.

Kitüntetett szerepük van a súlyponti főtehetetlenségi nyomatékoknak. Ezek között szerepel a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő tengelyekre számítható tehetetlenségi nyomatékok közül a legkisebb és a legnagyobb. A főtehetetlenségi tengelyek meghatározását megkönnyíti az a tény, hogy ha egy sík a testnek szimmetria síkja, akkor a sík tartalmaz két főtehetetlenségi tengelyt5, a harmadik főtengely merőleges a síkra. Ha x, y, z főtengely-rendszer ξ, η, ς pedig egy azonos kezdőpontú derékszögű koordináta-rendszer, akkor a 178. ábra jelöléseivel:



178.ábra

$$\Theta_\xi = \Theta_x \cos^2 \alpha_1 + \Theta_y \cos^2 \beta_1 + \Theta_z \cos^2 \gamma_1.$$

Az Új tengely-rendszerre vonatkozólag

$$\Theta_{\xi\eta} = -\Theta_x \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \Theta_y \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \Theta_z \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

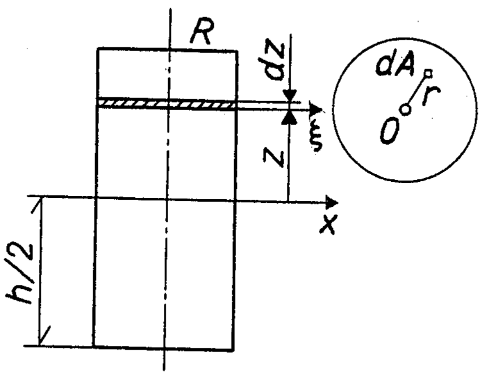
ahol pl. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ az η tengelyt meghatározó szögek.

36. Példa

Határozzuk meg egy R sugarú, h magasságú henger tehetetlenégi nyomatékát egy a henger tengelyére merőleges szimmetria-tengelyre.

Megoldás.

A henger z és z+dz koordinátájú keresztmetszetei által határolt szeletében (179. ábra) vegyünk fel egy dA alapterületű részecskét. Ennek tehetetlenségi nyomatéka:



179.ábra

$$dA\ dz\ \rho r^2 \qquad (\rho: \text{sűrűség}).$$

A szelet tehetetlenségi nyomatéka
0-
ra:

$$\Theta_0^{sz} = \int dA dz \rho r^2 = \rho dz \int r^2 dA = \rho dz I_0 = \rho dz \frac{R^4\pi}{2},$$

$$\xi - \text{re}: \qquad \Theta_\xi^{sz} = \rho dz I_\xi = \rho dz \frac{R^4\pi}{4}.$$

A szelet tehetetlenségi nyomatéka x-re, STEINER-tétel:

$$\Theta_x^{sz} = \rho dz \frac{R^4\pi}{4} + R^2\pi dz \rho z^2.$$

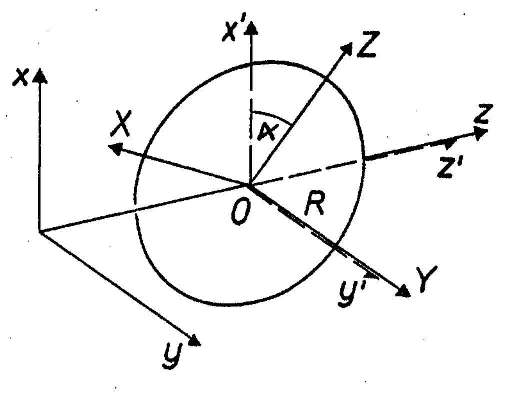
A teljes henger tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_z = 2\int_0^{h/2} R^2\pi\rho\left(\frac{R^2}{4} + z^2\right)dz = 2R^2\pi\rho\left(\frac{R^2}{4}\frac{h}{2} + \frac{h^3}{6}\right) = \underbrace{R^2\pi h\rho}_{m}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right),$$

ha a henger tömege m, $$\Theta_x = \frac{m^2}{12}(3R^2 + h^2).$$

37. Példa

Számítsuk ki egy ferdén felerősített – körlemeznek vehető – körfűrészlap Θ_{xz} tehetetlenségi nyomatékát a vázolt koordináta rendszerre vonatkozólag (180. ábra) Adott a fűrészlap R sugara és G súlya, valamint az α szög.



180.ábra

Megoldás

$\Theta_{xz} = \Theta_{x',z'} + m x_0 z_0 = \Theta x',z'$, , mert x_0=0.

$\Theta_{X',Z'}$, az 0 kezdőpontú, XYZ főtehetetlenségi rendszerre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékkal kifejezhető:

$$\Theta_{xz} = \Theta_{x',z'}, = -\Theta_X \cos(90^0 - \alpha)\cos(180^0 - \alpha) - \Theta_Z \cos\alpha\cos(90^0 - \alpha) =$$
$$= \Theta_Z \sin\alpha\cos\alpha - \Theta_z \cos\alpha\sin\alpha,$$

$$\Theta_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}(\Theta_X - \Theta_Z). \quad \text{Mivel} \quad \Theta_X = \frac{G}{g}\frac{R^2}{2}, \quad \Theta_Z = \frac{G}{g}\frac{R^2}{4}, \quad \Theta_x - \Theta_z = \frac{G}{g}\frac{R^2}{4},$$

$$\Theta_{xz} = \frac{G}{g}\frac{R^2}{8}\sin 2\alpha.$$

3.11. A forgó mozgás kinetikája

A FORGÓ MOZGÁS ALAPEGYENLETE

Írjuk fel a perdület-tételt egy – mondjuk a z tengely körül forgó testre. Legyen a test skaláris szögsebessége az adott pillanatban ω, a testre ható (külső) erőrendszer nyomatéka a z tengelyre M_z.

Ekkor $\Pi_z = \int r_i dm_i v_i = \int r_i dm_i r_i \omega = \omega \int r_i^2 dm = \omega \Theta_z s$

A perdület-tétel értelmében:

$$\frac{d\Pi_z}{dt} = \frac{d\omega\Theta_z}{dt} = \Theta_z \frac{d\omega}{dt} = \Theta_z \beta = M_z .$$

A jobb oldalon álló egyenlőség a forgó mozgás alapegyenlete. Az alapegyenlet azt mutatja, hogy állandó szögsebességű forgás csak akkor jön létre, ha a külső erők nyomatéka a forgástengelyre zérus, különben a test gyorsulva forog. Ezt a követelményt a gyakorlatban nem lehet szigorúan betartani, ezért ω nem teljesen állandó, hanem valamilyen ω_{min} és ω_{max} között ingadozik, a közepes szögsebesség

$$\omega_k = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2} .$$

A szögsebesség szélső értékei különbségének és a közepes szögsebességnek a hányadosa

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_k}$$

A forgás egyenlőtlenségi foka. Megmutatható, hogy ez a forgó test tehetetlenségi nyomatékának növelésével, tetszőlegesen szűk határok közé szorítható.

Miként a kinematika alapegyenletét, a forgó mozgás alapegyenletét is két feladattípus megoldására használhatjuk fel:

1. Ismert a forgó mozgást leíró $\varphi = \varphi(t)$ függvény, keressük a testre ható erők nyomatékát.
2. Ismert a testre ható erőnek a forgástengelyre vonatkozó nyomatéka, keressük a $\varphi = \varphi(t)$ függvényt.

Ha a tömegpont mozgására felírható $F_e m \dfrac{dv}{dt} = m a_e$ egyenlettel az $M_z = \Theta_z \dfrac{d\omega}{dt} = \Theta_z \beta$ egyenletet összehasonlítjuk, megállapítható, hogy a forgó mozgás kinematikájában tapasztalt analógia tovább építhető. Ugyanis például az

F_e erőnek	M_z forgatónyomaték
M tömegnek	Θ_z tehetetlenségi nyomaték
a_e pályagyorsulásnak	β szöggyorsulás felel meg.

KINETIKAI TÉTELEK

A forgó mozgást végző test kinetikai energiája a következőképpen számítható Θ és ω ismeretében:

$$E_K = \int \frac{1}{2} dm_i v_i^2 = \frac{1}{2}\int dm_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm_i r_i^2, \quad E_K = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

A forgó mozgás alapegyenletéből is levezethetők – a korábban látott tételekkel analóg – további kinetikai tételek.

Tétel (munkatétel): ha forgó mozgást végző merev testnek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka Θ, t_1 időpontban szögsebessége ω_1, t_2 időpontban szögsebessége ω_2, s a testre ható erők munkája a mondott időközben W, akkor

$$\frac{1}{2}\Theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2 = W.$$

A testre ható erők által végzett munka forgó mozgás esetén a következőképpen számítható: ha az erőnek a tengelyre vonatkozó nyomatéka m=M(φ) és t_1 időpontban $\varphi=\varphi_1$, t_2-ben $\varphi=\varphi_2$ akkor

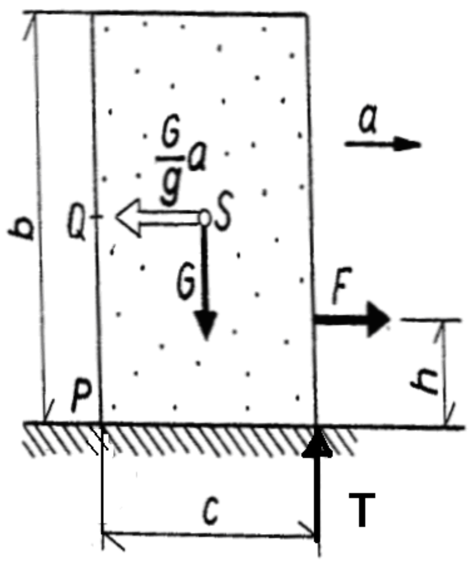
$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi)\, d\varphi.$$

Olykor előnyösen használható a perdület-tétel következő alakja: ha a merev test forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka Θ, t_1, illetve t_2 időpontban szögsebessége ω_1 illetve ω_2 s a külső erők nyomatéka M=M(t), akkor

$$\Theta\omega_2 - \Theta\omega_1 = \int M(t)\,dt.$$

FORGÓ TESTEK CSAPNYOMÁSAI

A forgó test tengelye és a csapágyak között nagy erők léphetnek fel. A fellépő hatások a test geometriai adataitól, tömeg-eloszlásától, ill. a testnek a forgástengelyhez viszonyított helyzetétől függenek. Hogy e tényről pontosabb képet kapjunk, meg kell ismerkedni a probléma tárgyalását megkönnyítő D' ALEMBERT-elvvel. Írjuk a kinetika alapegyenletét $\overline{F} - m\overline{a} = 0$ alakba. Ha a tömegpont tömegének és negatív gyorsulásának szorzatát erőnek tekintjük (D'ALEMBERT-féle erő, inercia erő), s bevezetjük az $\overline{F}^x = -m\overline{a}$ jelölést, akkor az $\overline{F} + \overline{F}^x = 0$ egyenlethez jutunk. Ehhez a formailag sztatikai egyenlethez a következő értelmezés fűzhető: a dinamikai problémák sztatikai problémákra vezethetők vissza, ha a vizsgált testekre ható valóságos erőkhöz csatoljuk a D'ALEMBERT-féle erőket s az így kapott egyensúlyi erőrendszert tekintjük (dinamikai egyensúly). Az elv gyakorlati alkalmazását az alábbi példán mutatjuk be: vízszintes sima talajra G súlyú, ismert méretű hasábot helyezünk (181. ábra). Kérdés, adott h magasságban



181.ábra

maximálisan mekkora vízszintes F erő hathat a hasábra a billenés veszélye nélkül. Az erő a hasáb szimmetria síkjában hat, $h\langle\frac{b}{2}$. A testre ható valóságos erők a billenés küszöbén a következők: G, F és a talaj által a hasábra gyakorolt T támaszerő, mely P-ben hat.

A D'ALEMBERT-erő: $\frac{G}{g}a$.

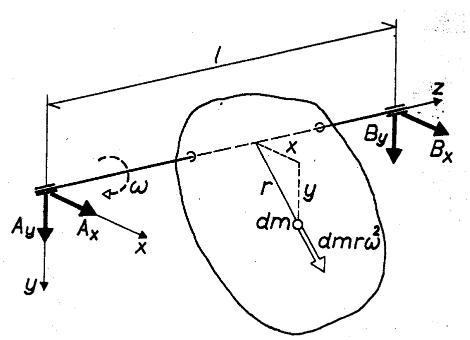
A valóságos erőkből és az inercia erőből álló erőrendszer egyensúlyban van, tehát nyomatéka bármely pontra zérus.
Nyomatékvonatkoztatási pontnak Q-t véve:

$$F(\frac{b}{2}-h)-G\frac{c}{2}=0, \qquad \underline{\underline{F=\frac{c}{b-2h}G.}}$$

A hasáb gyorsulását szintén sztatikai egyenlettel nyerhetjük:

$$F-\frac{G}{g}a0, \qquad \underline{\underline{a=\frac{c}{b-2h}g.}}$$

Ezek után alkalmazzuk a D'ALEMBERT-féle elvet a forgó test csapnyomásainak meghatározására. Teljes általánosságban e helyen nem tárgyaljuk a kérdést, csupán azt az esetet tekintjük, mikor a test egyenletesen forog egy vízszintes tengely körül. Az általános eset – mikor $\omega \neq 0$ és $\beta \neq 0$ – hasonlóan oldható meg. Tekintsük a 182. ábrán látható, vízszintes tengely körül állandó szögsebességgel forgó testet. Célunk meghatározni a vázolt koordináta rendszerben a csapágyerők A_x, A_y, B_x, B_y komponenseit (A_z=B_z=0).



182.ábra

A test minden egyes dm tömegű részéhez csatoljuk az $r\omega^2$ dm nagyságú inercia erőt. Az inercia erő komponensei

$$r\omega^2 dm\frac{x}{r}=\omega^2 xdm \quad \text{és} \quad r\omega^2 dm\frac{y}{r}=\omega^2 ydm.$$

A csapágyerők és az inercia erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, tehát igazak a következők:

$$A_x + B_x + \omega^2 \int xdm = 0,$$

$$A_y + B_y + \omega^2 \int ydm = 0,$$

$$-lB_y - \omega^2 \int yzdm = 0,$$

$$lB_x + \omega^2 \int xzdm = 0.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\int xdm = mx_s, \quad \int ydm = my_s, \quad \int yzdm = \Theta_{yz}, \quad \int xzdm = \Theta_{xz},$$

(itt x_s, y_s a test súlypontjának koordinátái, m a test tömege), a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$A_x + B_x = -\omega^2 mx_s,$$

$$A_y + B_y = -\omega^2 my_s,$$

$$B_y = -\frac{\omega^2}{l}\Theta_{yz},$$

$$B_x = -\frac{\omega^2}{l}\Theta_{xz}.$$

Ebből az egyenletrendszerből a forgás következtében fellépő csapágyreakciók kiszámíthatók

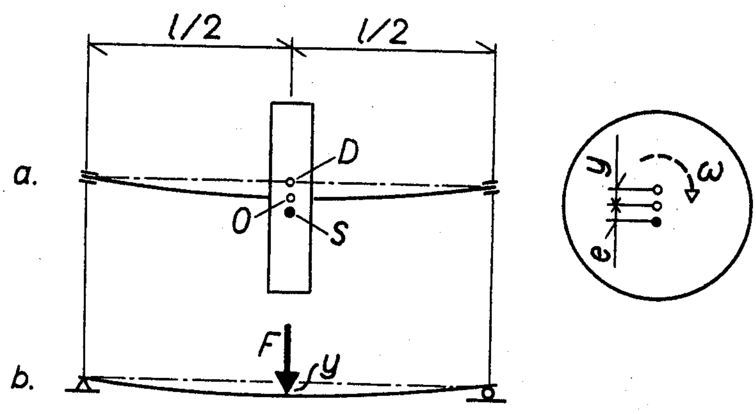
Abban az esetben mikor $x_s = y_s = 0 : A_x = -B_x$ és $A_y = -B_y$.

Ilyenkor a csapágyreakciók erőpárt alkotnak, melynek síkja együtt forog a testtel, s ezért a csapágyakat periodikusán változó erő terheli, ami káros hatásokkal jár.

Ha azonban $x_s = 0$ és $y_s = 0$, s ugyanekkora még $\Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0,$ az inercia erők következtében nem ébrednek csapágyerők. Ilyenkor a forgástengely egybeesik a test valamelyik főtehetetlenségi tengelyével. Általában egy főtehetetlenségi tengelye körül forgó test esetében a csapágyakban a forgás következtében nem ébred reakcióerő, illetve a reakciók ugyan akkorák, mint nyugalom esetén.

KRITIKUS FORDULATSZÁM

A forgó mozgást végző test lehetséges maximális szögsebességét nem csupán a test elhelyezkedése, tömegeloszlása befolyásolja, hanem a forgástengely geometriai és szilárdsági adatai is. Legyenek például a 183. ábrán látható tárcsa forgástengelyének adatai: l, I, E és legyen a tengely közepén elhelyezett m tömegű tárcsa 0 geometriai középpontjától e.



183.ábra

Állandó ω szögsebességű forgás esetén a tengely kis mértékben meggörbül, a geometriai forgástengely és a tárcsa középsíkjának D döféspontja valamint a valóságos forgástengely 0 döféspontjának y távolsága állandósul. A D, §, S pontokat egy egyenesbe esőnek vesszük, tehát a súlypont egy R=y+e sugarú körön mozog.

A súlypontra ható erő $F=mR\omega^2$. Ezt az erőt a rugalmas anyagú forgástengely szolgáltatja. A tengely rugalmas tulajdonságát jellemezhetjük az ún. rugómerevséggel. Ez a rugót terhelő F erő és az előálló y lehajlás hányadosa: $s=\frac{F}{y}$. Ha példánkban a tengelyt kéttámaszú tartónak vesszük, akkor a rugómerevség: $s=F:\frac{Fl^3}{48EI}$, $s=\frac{48EI}{l^3}$.

Ekkor tehát a tárcsára ható erő $ys=mR\omega^2=m(y+e)\omega^2$, amiből

$$y=\frac{\omega^2}{\frac{s}{m}-\omega^2}e.$$

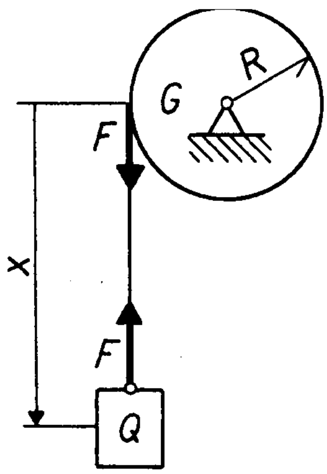
Ami9nt látható, y függ a szögsebességtől. Ha $\omega^2 \rightarrow \frac{s}{m}$, $y \rightarrow \infty$, vagyis a tengely meg nem engedhető mértékben deformálódik.

Az $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ érték a kritikus szögsebesség, ill. a neki megfelelő fordulatszám a kritikus fordulatszám.

Mivel gyártási hibára, bizonyos mértékű e külpontosságra mindig számíthatunk, a kritikus fordulatszámot el kell kerülni.

38. Példa

Adott a 184. ábrán látható G súlyú, R sugarú henger, s a hengerre csévélt súlytalan fonálhoz kapcsolt Q súlyú teher. A henger fix forgástengelye körül szabadon elfordulhat.



184.ábra

Számítsuk ki, hogy mekkora a henger szöggyorsulása, ha a rendszert magára hagyjuk, s mekkora a teher sebessége x nagyságú süllyedés után!

Megoldás.

Írjuk fel a mozgásegyenleteket a két testre külön-külön! A teherre ható erők: Q súlyerő, F fonálerő. $\ddot{x} = a$ jelöléssel

$$Q - F = \frac{Q}{g} a.$$

A hengerre ható erők: F, G és a csapágyerő. Az alapegyenlet:

$$FR = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \beta.$$

A harmadik egyenlet a pályagyorsulás és a szöggyorsulás közti kapcsolatot fejezi ki:

$$\beta R = a .$$

Ezután F-et kiküszöbölve és a-t β-val kifejezve nyerjük a szöggyorsulást:

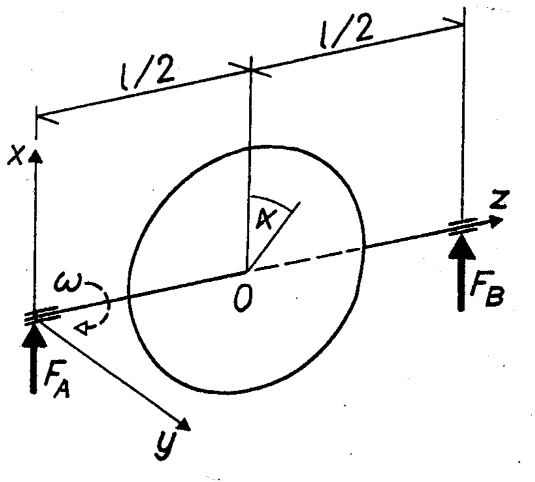
$$\beta = \frac{2Q}{2Q+G}\frac{g}{R}.$$

A teher gyorsulása, $a = R\beta = \frac{2Q}{2Q+G}g$ állandó, így a sebesség

$v = \sqrt{2ax}, \quad v = \sqrt{\frac{Q}{Q+\frac{1}{2}G}2gx}.$ Ez az eredmény munkatétellel könnyebben megkapható.

39. Példa

Számítsuk ki egy ferdén felerősített körfűrészlap esetén a forgásból származó reakciókat. A fűrészlap a forgástengellyel 90^0-α szöget zár be, a fűrészlap tömege m, sugara R, a szögsebesség ω (185. ábra)



185.ábra

Megoldás.

$F_A = -F_B = \frac{\omega^2}{l}\Theta_{xz}$. Mint a 37. példában láttuk, $\Theta_{xz} = m\frac{R^2}{8}\sin 2\alpha$, tehát

$$F_A = -F_B = m\frac{R^2}{8}\frac{\omega^2}{l}\sin 2\alpha.$$

Hogy képet alkossunk a dinamikus reakciók nagyságáról, vegyük a következő adatokat: m= 1 = kg, R = 0,4 m, l = 1 m, $\alpha = 1^o$, $n = 4\,000\frac{1}{min}$,

$$F_A = 1\frac{0{,}4^2}{8}(\frac{400\pi}{3})^2 0{,}035, \qquad F_A = 122{,}8N.$$

A sztatikus reakció: $F_A^{'} = \frac{mg}{2} = 4{,}91$ N. A dinamikus reakció ennek 25-szöröse.

3.12. A síkmozgás kinematikája

A MEREV TEST MOTGÁSAI

A merev test kinematikáját kevésbé részletesen tárgyaljuk, mint az anyagi pont kinematikáját. Ennek oka egyrészt a témakör bonyolultsága, másrészt az a tény, hogy a gyakorlatban rendszerint csak forgó-, csavar- és síkmozgással találkozunk. Akkor mondjuk, hogy a test mozog, ha van mozgó pontja. A test mozgás közben a tér ugyanazon részét foglalja el s esetleg végtelen sok pontja helyben marad.

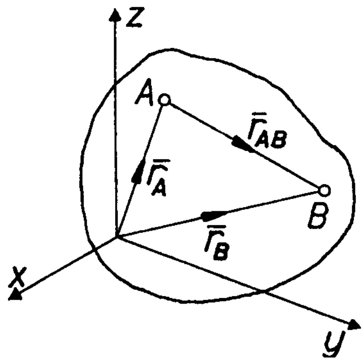
Tétel: a merev test mozgását meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontjának mozgása.

Bizonyítás: legyen a három pont A, B, C a test egy tetszőleges újabb pontja P, és P-nek a három pont által kifeszített síkra vonatkozó talppontja T. Legyen a testtel együtt mozgó három pont egy további helyzete A', B', C' és a talppont új helyzete T'. Ha figyelembe vesszük a test merevségét és azt, hogy P-ből az ABC háromszöget ugyanolyan körüljárásúnak látjuk, mint P'-ből az A'B'C' háromszöget, akkor P' a PT távolságnak T'-ből történő (A'B'C' síkra merőleges) felmérésével egyértelműen meghatározható.

Ennek alapján a test mozgásának vizsgálata helyett elegendő egy háromszög mozgásának vizsgálatára szorítkozni.

A merev test legfontosabb mozgástípusai – a már megismert forgó mozgáson kívül – a következők.

Transzláció a merev test mozgása, ha egyenesei mozgás közben párhuzamosak maradnak eredeti helyzetükkel.



186.ábra

Tétel: a transzlációs mozgást végző test tetszőleges A és B pontjának pályagörbéi egybevágó görbék, és minden pillanatban $\bar{v}_A = \bar{v}_B$, $\bar{a}_A = \bar{a}_B$ (e vektorok azonban az időben változhatnak).

Bizonyítás: Legyen az A-ból B-be mutató vektor $\bar{r}_{AB}$ (186. ábra).

Ez a vektor a test merevsége és a transzláció definíciójának értelmében állandó, ennél fogva $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}$, tehát B pályája A pályájának $\bar{r}_{AB}$ vektorral történő eltolásával nyerhető. A tétel másik része így adódik:

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{AB} \quad \text{s mivel} \quad \dot{\bar{r}}_{AB} = 0,$$

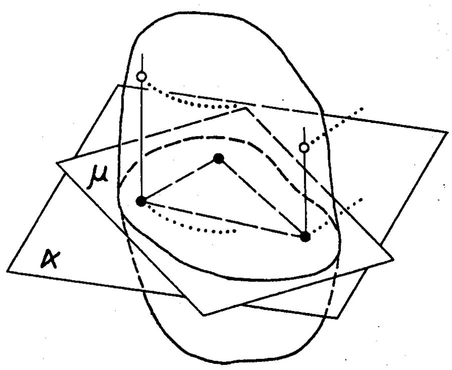
$$\bar{v}_B = \dot{\bar{r}}_A = \bar{v}_A. \quad \text{Újabb} \quad \text{deriválással}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

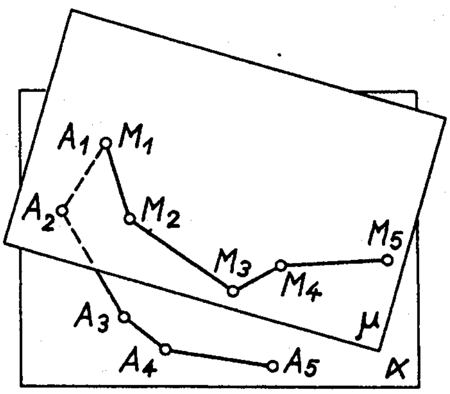
Ha mozgás közben a merev test egyetlen pontja fix, akkor a test mozgása gömbmozgás (pörgettyűmozgás).

SÍKMOZGÁS

A merev test síkmozgását az jellemzi, hogy mozgás közben a test három pontja egy rögzített síkban, az alapsíkban mozog. Célszerű megkülönböztetni a fix α alapsíkot és a mozgó háromszögnek a síkját, az α-val egybeeső μ mozgó síkot. Az alapsíkban mozgó pontok pályái általában különbözők, de a testnek azon pontjai, melyek egy az alapsíkra merőleges egyenesre esnek, egybevágó síkgörbéket írnak le (187. ábra). Mint láttuk, a test mozgásának vizsgálata helyett foglalkozhatunk csupán az alapsíkban mozgó háromszög mozgásával, sőt elegendő a háromszög egy oldalának mozgását



187.ábra

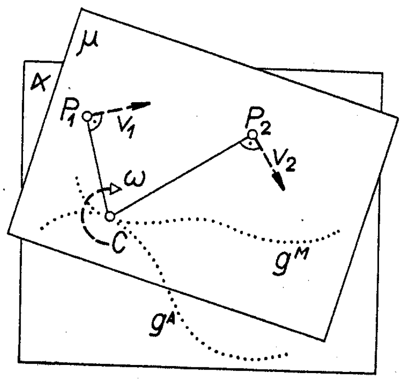


188.ábra

ismerni, ha síkmozgásról van szó. Az alább vázolandó gondolatmenet célja: szemléletes képet adni arról, hogy miképpen megy végbe a test síkmozgása. Vegyük fel az α alapsíkban egy A_1, A_2..,A_n töröttvonalat (188. ábra) s a μ mozgó síkban egy M_1, M_2, …,M_n

töröttvonalat. A két töröttvonal megfelelő szakaszai legyenek egyenlők (pl. $\overline{A_2A_3} = \overline{M_2M_3}$), de a törésszögek különbözhetnek. Helyezzük a μ síkot úgy az α síkra, hogy az M_1 és A_1 pontok fedésbe kerüljenek. Ezután forgassuk el a μ síkot a fedésben lévő M_1, A_1 pontok körül valamilyen ω_1 szögsebességgel addig, míg M_2 egybe nem esik A_2-vel. Ezután a fedésbe került M_2, A_2 pontok körül forgassunk ω_2 szögsebességgel, míg M_3 fedésbe nem kerül A_3-al és így tovább.

Ha most a két töröttvonalat minden határon túl finomítjuk oly módon, hogy a megfelelő szakaszok továbbra is egyenlők és a szakaszok legnagyobbika is zérushoz tart, akkor az előbbi töröttvonalak helyett egy g^A és egy g^M görbét nyerünk s a síknak az α síkon történő mozgása úgy megy végbe, hogy g^M (csúszás nélkül) legördül a g^A görbén. A két görbe pillanatról pillanatra más- más pontban érintkezik egymással, s válik egy végtelenül rövid ideig tartó mozgás centrumává (momentán centrum). A μ sík tetszőleges pontjának sebességét a pillanatnyi ϖ szögsebességgel történő forgás alapján számíthatjuk. A 189. ábrán például a pillanatnyilag érvényes C centrum körül történik a forgás. A C pont pillanatnyi sebessége zérus, a mozgó sík pillanatnyi szögsebessége ϖ. A P_1 pillanatnyi $\bar{v}_1$ sebessége merőleges $\overline{CP_1}$-re, iránya ϖ-nak megfelelő, $\bar{v}_1 = \overline{CP_1}\varpi$. Hasonlóan számítható a mozgó sík bármely további pontjának sebessége. Az elmondottak alapján C neve: sebességpólus (momentán centrum). A g^A és g^M görbék úgy is származtathatók, hogy a sebességpólust minden pillanatban megjelöljük az álló és a mozgó síkon.

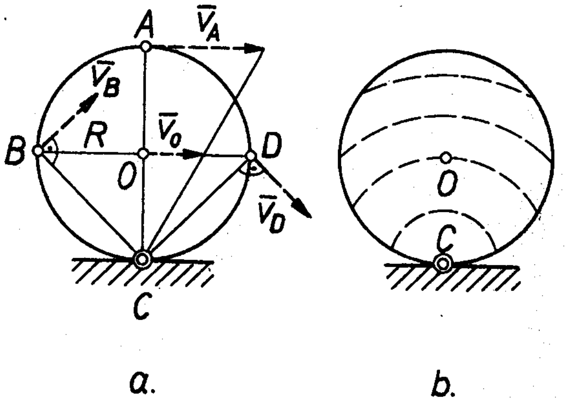


189.ábra

Az álló síkon kijelölt sebességpólusok összessége (g^A) az álló pólusgörbe, a mozgó síkon megjelölt sebességpólusoké (g^M) a mozgó pólusgörbe. Ezek általában nem egybevágó görbék. Ha a sík P_1 és P_2 pontjának különböző irányú sebességét ismerjük egy adott pillanatban és van sebességpólus, akkor azt az ábrán látható módon a sebességvektorokra állított merőlegesek metszéspontjaként kapjuk. Megjegyezzük, hogy a síkmozgás csak az elmozdulások és sebességek szempontjából fogható fel elemi forgó mozgások egymásutánjának, a gyorsulások szempontjából nem.

Bizonyítható, hogy minden sebességpólussal rendelkező mozgás előállítható a mozgó pólusgörbének az álló pólusgörbén történő legördítésével, s hogy ez az előállítás egyértelmű. Más szóval: egy adott mozgáshoz csak egy meghatározott g^A, g^M görbepár tartozik. Az eddigiek szemléltetése végett tekintsük egy gördülő kerék mozgását, mint síkmozgást (190.ábra)!

A pólusgörbék: a talajt képviselő egyenes és a kerék határoló vonala. Sebességpólus: a kerék középpontjának állandó pályasebessége v_0, a kerék sugara R, a kerék pillanatnyi szögsebessége $\omega = \frac{v_0}{R}$. Az ábra feltünteti a sebesség változását egy átmérő mentén, valamint az egyenlő pályasebességű pontokat. (190/b. ábra). Most kapunk választ arra a kérdésre, hogy a ciklois mozgás sebességvektora hogyan határozható meg. A kerék B pontjának ciklois-mozgásához tartozó v_b sebességvektor merőleges BC egyenesre,



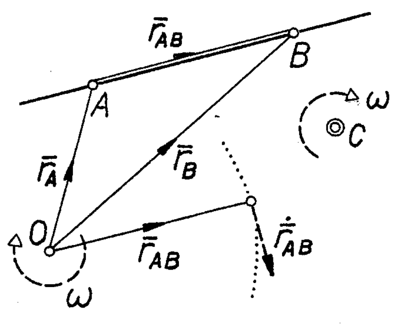
190.ábra

$v_b = \overline{BC}\omega = \overline{BC}\frac{v_0}{R}$. Síkmozgást végző testek kinematikai vizsgálatánál hasznos az alábbi

Tétel: ha a sebességpólussal rendelkező mozgás során a mozgó sík pillanatnyi szögsebessége ω, egy A pontjának sebessége v_A, valamely B pontjának sebessége ugyanazon pillanatban v_B, továbbá v_{AB}, egy $\overrightarrow{AB}$-ral egyenlő, kezdőpontja körül ω szögsebességgel forgó vektor végpontjának sebessége, akkor

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$.

Bizonyítás



191.ábra

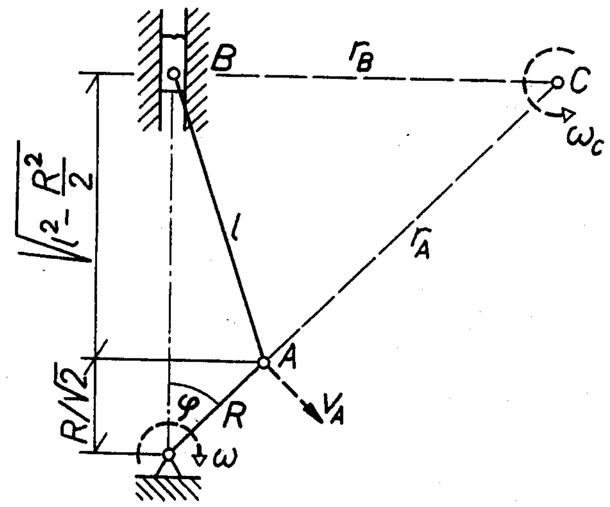
A 191. ábra jelöléseivel

$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}, \bar{v}_B = \bar{r}_A' + \bar{r}_{AB}' = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$.

Az $\dot{\bar{r}}_{AB}$ meghatározása végett toljuk el az $\bar{r}_{AB}$ vektort a koordináta rendszer 0 kezdőpontjába. A mozgás során az eltolt $\bar{r}_{AB}$ végpontja egy AB sugarú körön mozog, $\dot{\bar{r}}_{AB}$ ennek az ω szögsebességű körmozgásnak a sebessége, mely – merőleges AB-re, - nagysága $\overline{AB \cdot \omega}$, irányát a sebességpólus körüli forgásmód szabja meg. A tételben szereplő jelöléssel tehát $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$.

40. Példa

Határozzuk meg a 192. ábrán vázolt keretfűrész hajtórúdjának sebességpólusát, pillanatnyi szögsebességét és B pontjának sebességét a vázolt helyzetben.



192.ábra

R = 0,4 m, l = 2 m, $\omega = 4\pi \frac{1}{s}$,

$\varphi = 45^o$.

Megoldás.

A és B pontban a sebességvektorok állása ismert, a sebességvektorokra állított merőlegesek metszéspontja szolgáltatja a pillanatnyilag érvényes C sebességpólust. Ha a C körüli pillanatnyi forgás szögsebessége ω_C, akkor

$$\omega_C r_A = R\omega, \quad \omega_C = \frac{R}{r_A}\omega.$$

Az ábráról leolvasható, hogy

$$r_A = \sqrt{2}\sqrt{l^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{2l^2 - R^2},$$

Tehát

$$\underline{\underline{\omega_C = \frac{R}{\sqrt{2l^2 - R^2}}\omega}} = 1{,}8\frac{1}{s}.$$

$$v_B = r_B\omega_{C,}$$

$$r_B = \frac{R}{\sqrt{2}} + \sqrt{l^2 - \frac{R^2}{2}},$$

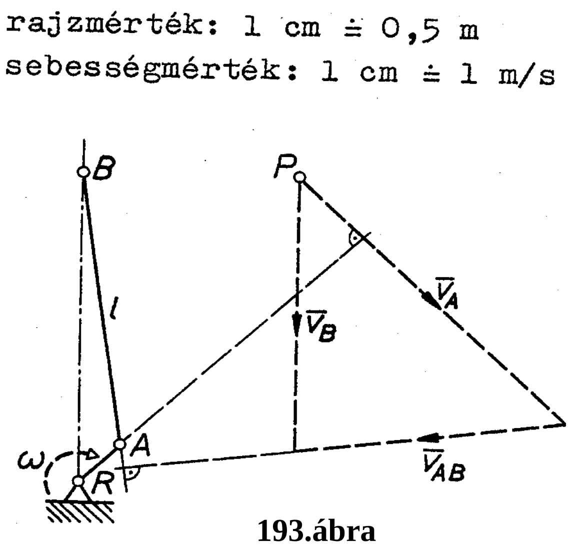
$$v_B = \frac{R + \sqrt{2l^2 - R^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2l^2 - R^2}} = \underline{\underline{v_B = 4{,}07\ m/s.}}$$

41. Példa

Állapítsuk meg az előbbi példában szereplő keretfűrész B pontjának sebességét szerkesztéssel:

Megoldás.

A $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$ vektoregyenlettel kijelölt utasításokat kell végrehajtani.



193.ábra

Mérjük fel $\bar{v}_A -t$ egy tetszőleges P pontból, egy alkalmas választott mérték alapján (193. ábra)! $v_A = R\omega = 0{,}4 \cdot 4\pi = 5{,}03 m/s.$ $\bar{v}_{AB} -t$ az imént nyert vektorvégponthoz kell fűzni. $\bar{v}_{AB}$ hosszát ugyan nem ismerjük, de tudjuk, hogy állása merőleges AB-re. Mivel $\bar{v}_B$ állása ugyancsak ismert, $\bar{v}_{AB}$ és $\bar{v}_B$ közös végpontját a P-ből húzott, ismert állású egyenesek metszéspontja szolgáltatja.

A vektorábrából: $\underline{\underline{v_B = 4{,}08\ m/s.}}$ A rúd szögsebességét is meghatározhatjuk:

$$\omega_C = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{3{,}6}{2}.; \qquad \underline{\underline{\omega_C = 1{,}8\frac{1}{s}}}.$$

3.13. A síkmozgás kinetikája

MOZGÁSEGYENLETEK

A merev test kinetikájának bizonyos tételeit már a 3.8. tárgycsoportban megismertük (munka-, perdület-, tömegközéppont- tétel). A tetszőleges erőrendszer hatása alatt álló merev test súlypontjának mozgását nyomon követhetjük a tömegközéppont tételével. A testnek a súlypont körül végbemenő mozgása általános esetben azonban igen bonyolult, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a testre ható külső erők a test egy főtehetetlenségi síkjába esnek.

Ha még feltesszük, hogy a mozgás kezdetén a test pontjai nyugalomban vannak, vagy sebességük párhuzamos az említett síkkal, akkor a létrejövő mozgás síkmozgás lesz, melynek alapsíkja a főtehetetlenségi sík.

A mozgás vizsgálata végett vegyünk fel egy derékszögű koordináta rendszert úgy, hogy az x, y sík a főtehetetlenségi sík legyen. Ekkor a külső erőrendszer F_x, F_y komponensei, a test tömege és súlypont-koordinátái között fennáll a következő kapcsolat:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_s \\ F_y &= m\ddot{y}_s \end{aligned}\right\} \text{(súlypont – tétel).}$$

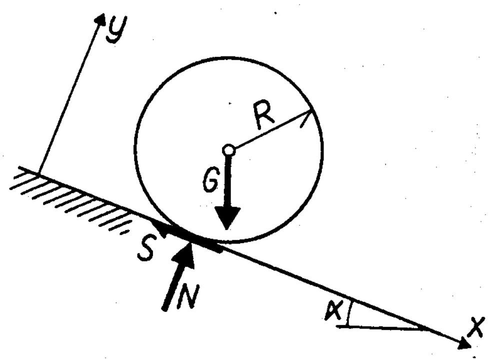
Ha a külső erők nyomatéka a z tengellyel párhuzamos M_z, a perdület Π_z,

$\dfrac{d\Pi_z}{dt} = M_z$, (perdület-tétel).

A fenti három egyenlet közül az első kettő a súlypont mozgására, a harmadik az alapsíkra merőleges főtehetetlenségi tengely körüli mozgásra vonatkozik. Az egyenletek alkalmazási módját példán szemléltetjük.

Vizsgáljuk meg egy érdes lejtőn legördülő farönk mozgását. A rönk súlya G, sugara R, a lejtő hajlásszöge α, a súrlódási tényező μ. A lejtő által a rönkre gyakorolt erő összetevői S és N.

A koordináta rendszert célszerű a 194. ábrán látható módon felvenni.



194.ábra

A mozgásegyenletek:

$$G\sin\alpha - S = \frac{G}{g}\ddot{x}$$
$$SR = \Theta\beta$$

Az egyenletekben $\ddot{x}$ a súlypont gyorsulása, Θ a rönk tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre. Az y irányú erők érdektelenek, hiszen y irányú mozgás nincs.

Az ismeretlenek: $\ddot{x}, \beta$ és az S súrlódó erő, melynek nagysága maximálisan $\mu G\cos\alpha$.

Vegyük figyelembe, hogy tiszta gördülés esetén a súlypont sebessége és a rönk szögsebessége között a kapcsolat: $\dot{x} = R\omega$, ezért $\ddot{x} = R\beta$. Az $S = \Theta\frac{\beta}{R} = \Theta\frac{\ddot{x}}{R^2}$ súrlódó erőt az első egyenletbe helyettesítve és felhasználva, hogy $\Theta = \frac{1}{2}\frac{G}{g}R^2$,

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha, \qquad S = \frac{G}{3}\sin\alpha.$$

Mivel $S = \frac{G}{3}\sin\alpha \le \mu G\cos\alpha$, $\quad \mathrm{tg}\alpha \le 3\mu$.

A munkatétel alkalmazásával kapcsolatban szükség lehet a síkmozgást végző merev test kinetikai energiájának számítására. Ez kétféleképpen történhet: Számíthatjuk a pillanatnyi forgó mozgást végző test energiáját az

$$E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

Képlettel, ahol Θ a test pillanatnyi forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, ω a pillanatnyi szögsebesség. Ha az adott pillanatban a súlypont pályasebessége v_s, a szögsebesség ω, a súlyponti z főtengelyre számított tehetetlenségi nyomaték Θ_z, akkor az m tömegű test kinetikai energiája így is számítható:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_z \omega^2 .$$

Hasonlóan számítható a test perdülete is az alapsíkra merőleges valamely ξ tengelyre: a súlypontba koncentrált teljes tömegnek a fix tengelyre számított perdületéhez hozzáadjuk a súlyponti tengelyre vonatkozó perdületet:

$\Pi_\xi = m v_s d + \Theta_z \omega$ (d a mozgásmennyiség-vektor távolsága ξ -tól).

A skaláris perdület számításánál figyelembe kell venni a jobb oldalon álló perdület előjelét.

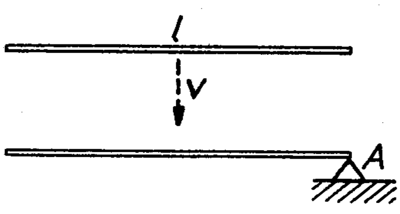
3.14. Ütközés

Ha síkmozgást végző test valamilyen akadálynak ütközik, a test pontjainak sebessége és gyorsulása igen rövid idő alatt nagymértékben megváltozat. A nagy sebességváltozásból az impulzustétel alapján nagy erőkre következtetünk.

A továbbiakban feltesszük. hogy az ütközési erőkhöz képest az egyéb erők elhanyagolhatók és a testnek az ütközés alatti helyzetváltozása jelentéktelen.

Célunk az lesz, hogy a test ütközés utáni mozgására nézve nyerjünk felvilágosítást. E célból jól felhasználható a perdület-tétel. Ha a síkmozgást végző test perdületét a mozgás síkjában található akadály azon pontjára számítjuk, mely ütközési ponttá fog válni (illetőleg arra a z tengelyre mely e ponton átmegy s az alapsíkra merőleges), azt találjuk, hogy az ütközés előtti és utáni perdület egyenlő egymással. Az ütközési pontban fellépő erők nyomatéka ugyanis e pontra zérus, az egyéb erőket elhanyagolhatjuk, tehát $\frac{d\Pi_z}{dt} = M_z = 0,$ a perdület tehát állandó.

Ezen észrevétel alkalmazhatóságát két példán szemléltetjük. Egy vízszintes helyzetű, szabadon eső G súlyú. L hosszúságú gerenda egyik vége akadályba ütközik (195. ábra). Számítsuk ki a gerenda ütközési szögsebességét, ha az ütközés előtti pillanatban a gerenda sebessége v.



195.ábra

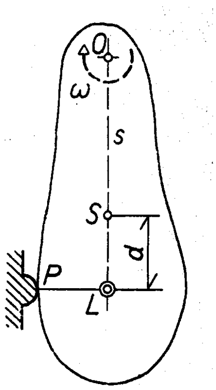
Perdület az ütközés előtt: $\Pi_A / \frac{G}{g} v \frac{l}{2}$.

Perdület az ütközés után:

$$\Pi'_A = \frac{G}{g}\frac{l}{2}\omega\frac{l}{2} + \frac{G}{g}\frac{l^2}{12}\omega.$$

A két perdület egyenlőségéből: $\underline{\underline{\omega = \frac{3v}{2l}}}$.

Másik problémaként vizsgáljuk meg, hogy egy vízszintes tengely körül forgatható merev test – fizikai inga – ütközésénél mi a feltétele annak, hogy az ütközés következtében ne terheljék járulékos reakciók a csapágyat.



196.ábra

Legyen a test súlypontja S, a forgástengely és a főtehetetlenségi sík döféspontja 0, az ütközési erő hatásvonalának S-től mért távolsága d (196. ábra). Ezt a d távolságot akarjuk meghatározni.

Írjuk fel a perdületeket az ütközési pontra!

Ha a pillanatnyi szögsebesség ω a test tömege m, tehetetlenségi nyomatéka Θ, akkor ütközés előtt:

$$\Pi_P = m\omega s d - \Theta\omega.$$

Ütközéskor a testre ható erők: a súlyerő, melyet elhanyagolunk, a P ponton ébredő ütközési erő, melynek P-re nincs nyomatéka. Feltételünk szerint 0-ban az ütközés következtében nem ébred erő, tehát a testre ható összes erőnek a P pontra vonatkoztatott nyomatéka zérus, az ütközés előtt és azt követőleg.

A $\frac{d\Pi}{dt} = M$ tétel értelmében – mivel most M=0 – a perdület nem változik, tehát $\Pi_p = \Pi_{p'} = 0$, azaz az ütközés előtti perdület egyenlő az ütközés utáni perdülettel: $m\omega s d - \Theta\omega = 0$.

Ha i jelöli a testnek a súlyponti tengelyre vonatkozó inerciasugarát, akkor a fenti egyenletet így írhatjuk:

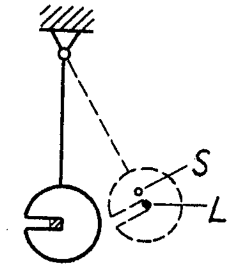
$$msd - mi^2 = 0,$$

a keresett d távolság tehát:

$$d = \frac{i^2}{s}.$$

Az így megadott d távolság csak a test tehetetlenségi sugarától és a forgástengely s távolságától függ. A súlyponttól d távolságra lévő L pont a testnek az adott felfüggesztéséhez tartozó lökésközéppontja.

Helyesen megtervezett ütő eszköz – például a lengőkalapács – az ütést a megfogási (felfüggesztési) pontra vonatkozó lökésközéppontban kapja (197. ábra).

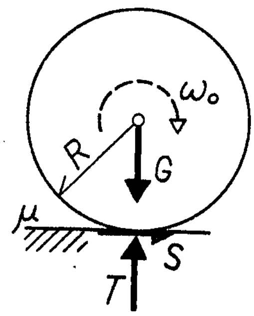


197.ábra

42. Példa

R sugarú, G súlyú henger tengelye körül ω_0 szögsebességgel forog. A hengert lassan egy érdes síkra helyezzük a 198. ábra szerint.
Határozzuk meg a henger tengelyének végleges sebességét.

Megoldás.
A hengerre ható erők kezdetben: a G súlyerő és a vele egyenlő T támasztó erő, továbbá az S=μG súrlódó erő.
A mozgásegyenletek:



198.ábra

$$\mu G = \frac{G}{g}\ddot{x}$$

$$\mu G R = \frac{1}{2}\frac{G}{g}R^2\beta$$

$\ddot{x} = \mu g, \beta = \frac{2\mu g}{R}\cdot\ddot{x}$ a tengely gyorsulása, β a szöggyorsulás. A henger szögsebessége: $\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t$. A henger mindaddig csúszva gördül a talajon, míg a tiszta gördülés $R\omega = v$

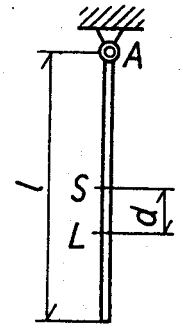
feltétel nem teljesül. Az eddig eltelő idő $v = \ddot{x}t = \mu g t = R(\omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t) - $ bőő $t = \frac{R\omega_0}{2\mu g}$. A szögsebesség végső értéke $\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} \frac{R\omega_0}{3\mu g}$, $\omega = \frac{\omega_0}{3}$, a tengely sebessége: $\underline{\underline{v = \frac{R\omega_0}{3}}}$.

43. Példa

Számítsuk ki egy egyik végpontjánál felfüggesztett, l hosszúságú, G súlyú rúd lökésközéppontjának távolságát a felfüggesztési ponttól (199. ábra).

$$d = \frac{i^2}{s}, \quad \Theta = \frac{G}{g}\frac{l^2}{12} = \frac{G}{g}$$

$$i^2 = \frac{l^2}{12}, \quad s = \frac{l}{2}, \quad d = \frac{l}{6}.$$



199.ábra

A felfüggesztési ponttól az L lökésközéppontig mért távolság

$$\underline{\underline{\overline{AL}}} = \frac{2}{3}l.$$

Felhasznált és ajánlott irodalom

CHOLNOKY T.: Mechanika I., II., III. Bp. 1966. 68.

FALK S. : Műszaki Mechanika Bp. 1972.

Dr. HUSZÁR I.: Mechanika I., II., III., IV. (egyetemi jegyzet) Gödöllő 1972-75.

MUTTNYÁNSZKY Á.: Statika Bp. 1961.

MUTTNYÁNSZKY Á.: Szilárdságtan Bp. 1956.

MUTTNYÁNSZKY Á.: Kinematika és kinetika Bp. 1961.

Dr. PELIKÁN J.: Szilárdságtan Bp. 1972.

Dr. Rónai F.: Mechanika I., II. Sopron, 1973.

TIMOSHENKO S.: Engineering Mechanics New York, Toronto, London 1956.

WOOD HANDBOOK. US Gov. Printing Office 1974.

YOUNG D.H. Engineering Mechanics New York, Toronto, London 1956.