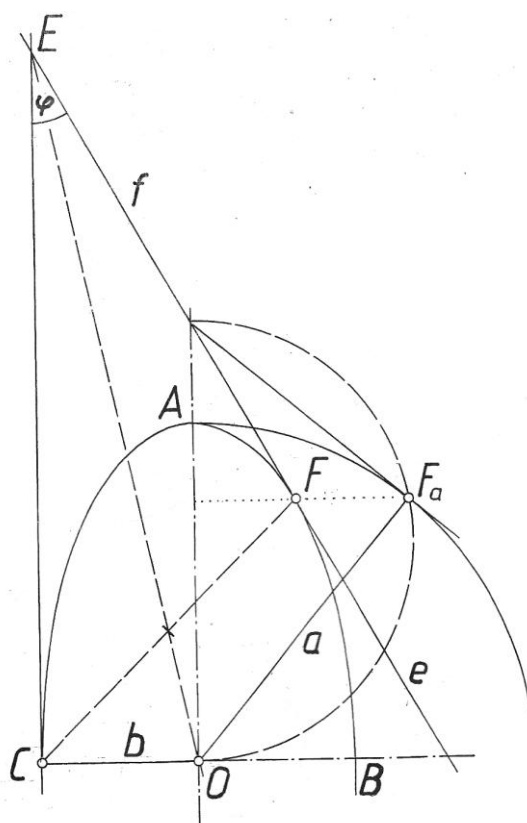


ELLIPSZIS - SZERKESZTÉSI SZÉLSŐÉRTÉK FELADAT

Írta: Hajdu Endre

Ha ismeretes egy ellipszis kistengelyének egyik végpontja, s az ahhoz tartozó érintő, akkor egy további érintő és a hozzá tartozó érintési pont ismeretében az ellipszis megszerkeszthető. Ha C a kistengely egyik végpontja, érintőjének és egy további e érintőnek metszéspontja E , végül e érintéspontja F (1. ábra), akkor az E pontot és a CF szakasz felező pontját összekötő egyenes a kistengely egyenesét az ellipszis O középpontjában metszi.



1. ábra

Így ismeretessé vált az ellipszis kistengelyének b fél hossza, valamint a nagytengelyének egyenese. Az ellipszist a főkörébe vivő affinitás az F érintéspontot olyan F_a pontba viszi át, mely az ábráról leolvasható módon megszerkeszthető. Az ellipszis nagytengelyének fél hossza $a = OF_a$. Az ellipszis lényeges adatai így már rendelkezésünkre állnak. Könnyen belátható, hogy az F érintéspont helyzetétől, vagyis az $f = EF$ távolságtól függően különböző méretű ellipszisek adódnak. E dolgozat célja annak megállapítása, hogy milyen f távolság esetén lesz az ellipszis a legnagyobb területű.

Mivel az ellipszis területe $A = ab\pi$, az ab szorzat maximalizálása a cél.

A feladat megoldásának egy lehetséges módja abból indul ki, hogy az ellipszis

kör merőleges vetületeként tekinthető. Ha valamely, az érintési feltételeknek eleget tevő, két vetületével ábrázolt kör* síkjának ε dőlésszögét és R sugarát az $f = EF$ távolság függvényében írjuk fel, akkor az optimális ellipszis adatai szélsőérték számítással előállíthatók.

A 2. ábra szerint $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Delta}{f \cdot \sin \varphi}$, ahol $\Delta = \sqrt{d^2 - f^2}$. A kör síkját az ábra síkjába

forgatva, a származtató kör sugara $R = d \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = d \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi}$.

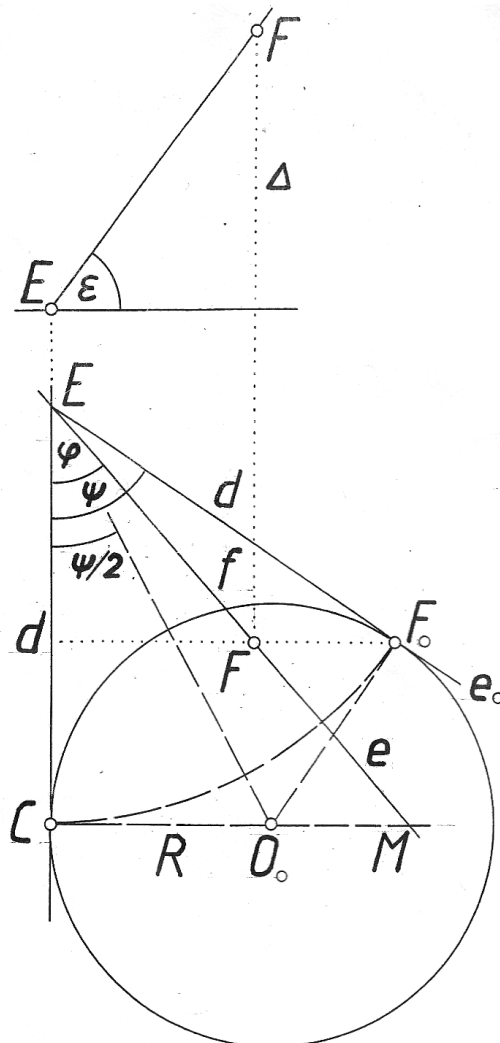
Mivel $\sin \psi = \frac{\sqrt{d^2 - f^2} \cdot \cos \varphi}{d}$, $\cos \psi = \frac{f \cdot \cos \varphi}{d}$, $R = d \sqrt{\frac{d - f \cdot \cos \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi}}$.

Az ellipszis nagytengelyének fél hossza $a = R$, a kistengely fél hossza

$b = R \cdot \cos \varepsilon$. Lévé $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{d^2 - f^2}}{f \cdot \sin \varphi}$, $\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = \frac{f \cdot \sin \varphi}{\sqrt{d^2 - f^2 \cos^2 \varphi}}$,

a vetület ellipszis kistengelyének fél hossza

$b = R \cdot \cos \varepsilon = d \sqrt{\frac{d - f \cdot \cos \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi}} \cdot \cos \varepsilon = d \sqrt{\frac{d - f \cdot \cos \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi}} \cdot \frac{f \cdot \sin \varphi}{\sqrt{d^2 - f^2 \cos^2 \varphi}}$, $b = \frac{df \cdot \sin \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi}$.



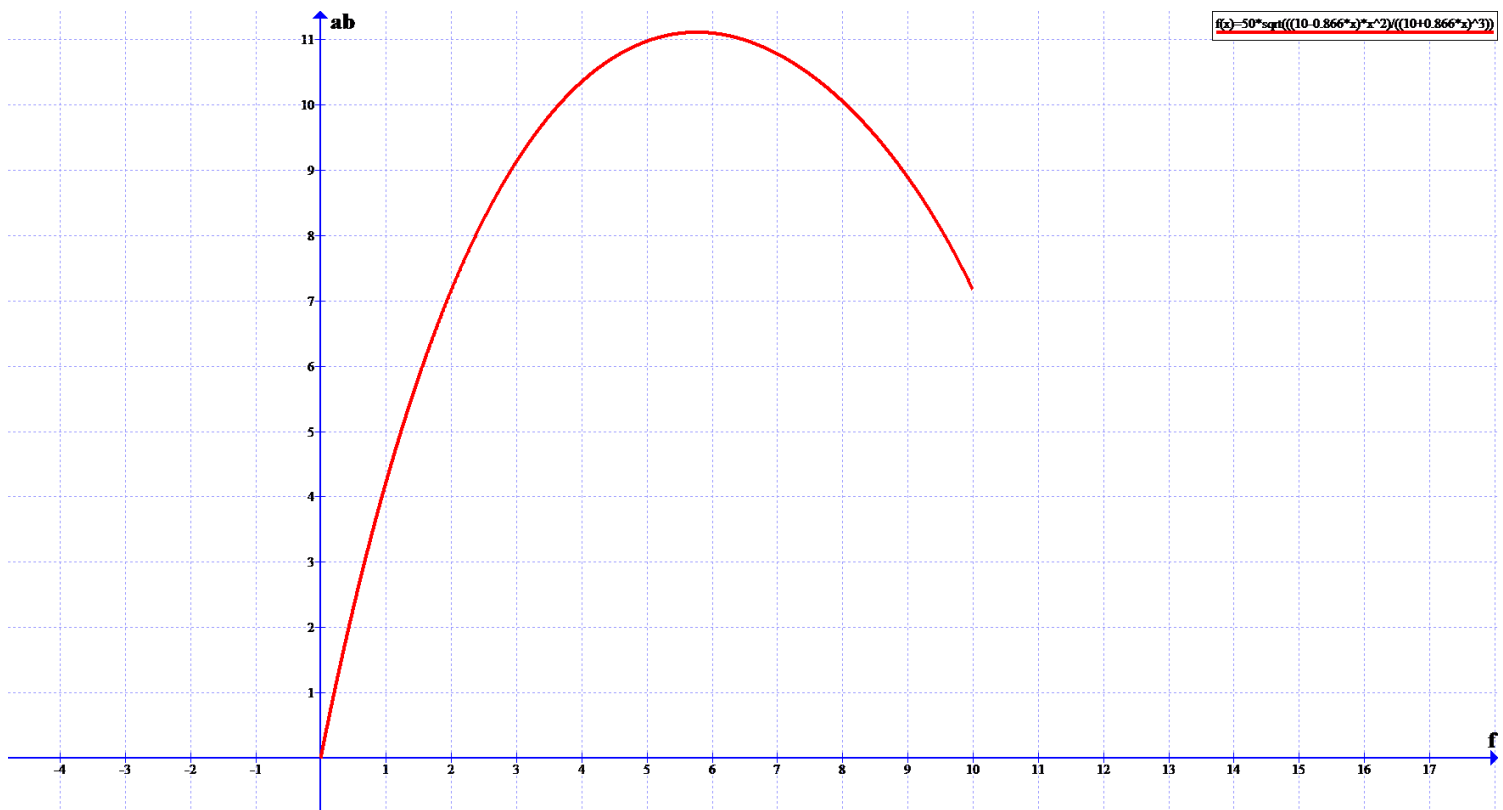
2. ábra

* a viszonyok egyszerűsége folytán a vetületek szokásos, vesszőkkel való jelzését mellőzzük.

Most már felírhatjuk az ab szorzatot f függvényeként:

$$ab = d \sqrt{\frac{d - f \cdot \cos \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi}} \cdot \frac{df \cdot \sin \varphi}{d + f \cdot \cos \varphi} = d^2 \cdot \sin \varphi \sqrt{\frac{(d - f \cdot \cos \varphi) f^2}{(d + f \cdot \cos \varphi)^3}}.$$

Az ab szorzat alakulását f függvényében a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra

A függvény f szerinti deriváltja

$$(ab)' = d^2 \cdot \sin \varphi \frac{(2fd - 3f^2 \cdot \cos \varphi)(d + f \cdot \cos \varphi)^3 - (d - f \cdot \cos \varphi) f^2 \cdot 3(d + f \cdot \cos \varphi)^2 \cos \varphi}{2 \sqrt{\frac{(d - f \cdot \cos \varphi) f^2}{(d + f \cdot \cos \varphi)^3}} (d + f \cdot \cos \varphi)^6}.$$

A deriváltat egyenlővé téve zérussal

$$(2fd - 3f^2 \cdot \cos \varphi)(d + f \cdot \cos \varphi) = 3f^2 (d - f \cdot \cos \varphi) \cos \varphi$$

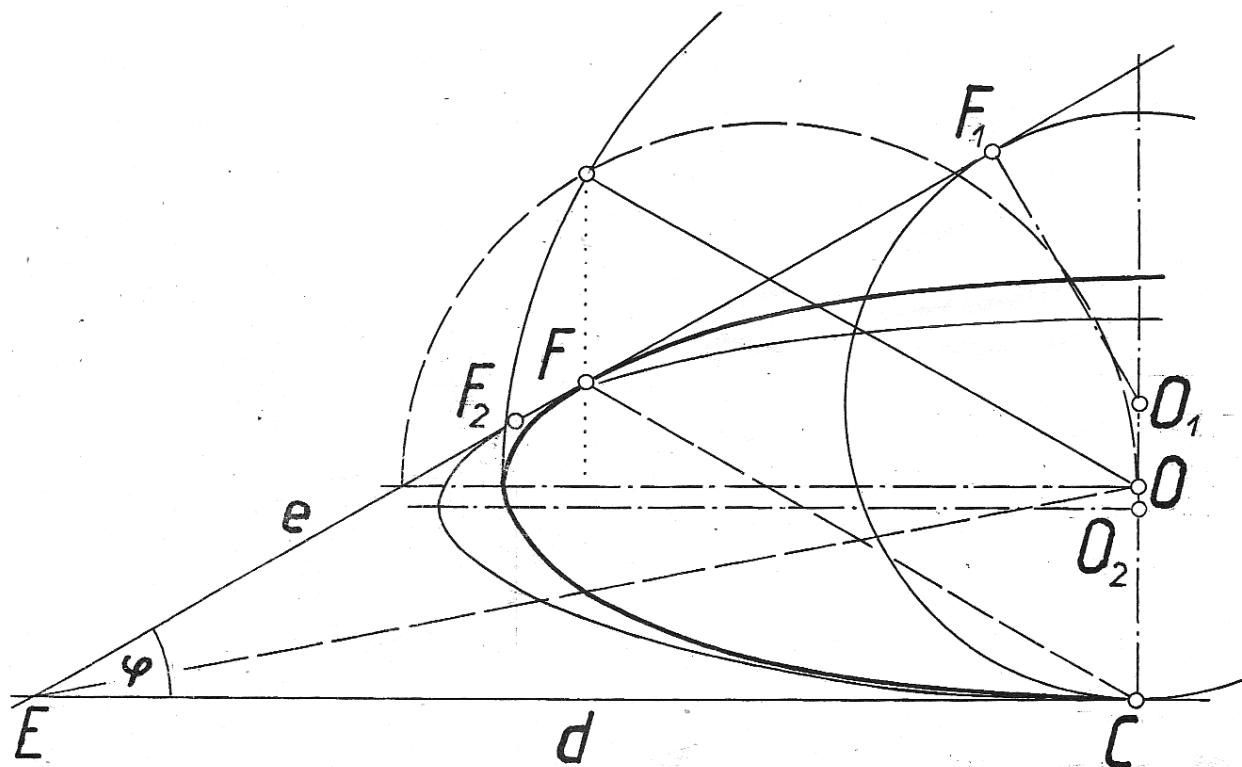
egyszerűsítve, rendezve

$$\underline{\underline{f = \frac{d}{2 \cos \varphi}}}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy a legnagyobb területű ellipszishez tartozó F érintéspont az EM távolság felezőpontja. Az optimális ellipszis területe

$$\underline{\underline{A = ab\pi = d^2 \operatorname{tg} \varphi \frac{\pi}{\sqrt{27}} \approx 0,6046 d^2 \operatorname{tg} \varphi.}}$$

A 4. ábra $d = 10$, $\varphi = 30^\circ$ adatok esetén ábrázol három lehetséges ellipszist.



4. ábra

A legnagyobb, $f = d$ értéknél az ellipszis körre fajul, középpontja O_1 területe $A_1 \approx 22,56$.

Az optimális, azaz legnagyobb területű, O középpontú, $f = \frac{10}{2 \cos 30^\circ} \approx 5,77$ adatú ellipszis terület $A \approx 0,604 \cdot 10^2 \operatorname{tg} 30^\circ \approx 34,87$.

Végül az optimálisnál kisebb, $f_2 = 5$ értékhez tartozó, O_2 középpontú ellipszis területe $A_2 \approx 33,65$.

Sopron, 2014. december 2.